ТРУДЫ

1-го Всероссійскаго Съѣзда Преподавателей

МАТЕМАТИКИ.

27 декабря 1911 г. — 3 января 1912 г.

ТОМЪ III.

Оглавленіе III тома.

Стр.

Предисловіе. III

Журналъ засѣданія Организаціоннаго Комитета 21 ноября 1913 г. Денежный отчетъ V

Докладъ **проф. Д. М. Синцова**: «Международная комиссія по преподаванію математики» 1

Докладъ **проф. Д. М. Синцова:** «О согласованіи программъ средней и высшей школы» 20

Докладъ **прив.-доц. С. Н. Бернштейна:** «Историческій обзоръ развитія понятія о функціи» 33

Докладъ **Я. В. Іодынскаго**: «Обзоръ современной литературы по теоретической ариѳметикѣ и тригонометріи» 43

Докладъ **В. І. Шиффъ**: «Обзоръ учебниковъ по аналитической геометріи, составленныхъ для реальныхъ училищъ» . . . 62

Обозрѣніе выставки 69

Списокъ опечатокъ во II томѣ 115

Объявленія 116

Въ третій и послѣдній томъ „Трудовъ“ вошли: 1) доклады, допущенные Организаціоннымъ Комитетомъ на Съѣздъ, но, по разнымъ причинамъ, оставшіеся на Съѣздѣ не прочитанными; 2) обозрѣніе выставки; 3) денежный отчетъ по Съѣзду и постановленіе Организаціоннаго Комитета объ учрежденіи преміи 1-го Всероссійскаго Съѣзда преподавателей математики.

Членамъ Съѣзда, уплатившимъ за 2-й томъ, 3-й высылается безплатно. Съ заявленіями о неполученіи его слѣдуетъ обращаться въ канцелярію Педагогическаго Музея (**Петербургъ, Фонтанка, 10**). Туда же надо направлять и требованія на нераспроданные еще экземпляры «Трудовъ».

Ноябрь 1913 года.

З. Макшеевъ.

Журналъ

засѣданія Организаціоннаго Комитета I-аго Всероссійскаго Съѣзда преподавателей математики.

21 Ноября 1913 года.

Предсѣдательствовалъ: З. А. Макшеевъ.

Присутствовали: С. А. Богомоловъ, И. Н. Кавунъ, А. Р. Кулишеръ, М. Г. Попруженко, Э. Ю. Лундбергъ, П. А. Некрасовъ, Д. Э. Теннеръ.

I) Заслушаны и утверждены отчетъ казначея и докладъ Ревизіонной Комиссіи, разсмотрѣвшей относящіеся къ отчету казначея документы и провѣрившей имѣющуюся наличность въ размѣрѣ 910 рублей 41 коп.

II) Постановлено: 3-й томъ «Трудовъ» разослать безплатно всѣмъ членамъ Съѣзда, уплатившимъ за первые два тома. Такимъ образомъ всѣ три тома «Трудовъ» обойдутся въ 3 р. членамъ Съѣзда, участвовавшимъ въ предварительной подпискѣ (2 р. подписныхъ+1 р. наложеннаго на 2-й томъ платежа), и въ 3 р. 10 коп.—не участвовавшимъ въ ней (наложенный на 1-й томъ платежъ 80 к.+2 р. 30 к. платежа налож. на 2-й томъ); сюда входятъ и почтовые расходы. Для членовъ Съѣзда, не участвовавшихъ въ подпискѣ, почтовыхъ расходовъ на 10 к. больше.

III) Заслушенъ предварительный разсчетъ стоимости изданія 3-го тома Трудовъ Съѣзда. Изъ этого разсчета слѣдуетъ, что за покрытіемъ расходовъ по составленію, печатанію, упаковкѣ и разсылкѣ 3-го тома, изъ имѣющейся въ наличности суммы 910 р. 41 к. останется не болѣе нѣсколькихъ десятковъ рублей. Продажная цѣна 3-го тома опредѣлена въ 75 коп.

IV) Имѣющіяся на лицо деньги и дальнѣйшія поступленія по продажѣ «Трудовъ» и «Указателя» постановлено передавать на храненіе въ кассу Педагогическаго Музея. При этомъ казначей Съѣзда Д. Э. Теннеръ выразилъ согласіе вести въ дальнѣйшемъ относящуюся къ сказаннымъ суммамъ отчетность.

V) Постановлено: если къ 1-му января 1915 г. изъ денежныхъ остатковъ по Съѣзду и доходовъ отъ продажи «Трудовъ» и «Указателя» составится сумма, превышающая 300 р., учредить премію «1-го Всероссійскаго Съѣзда преподавателей математики» на слѣдующихъ основаніяхъ.

§ 1. Премія въ размѣрѣ не менѣе 300 руб. составляется изъ остатковъ изъ суммъ 1-го Всероссійскаго Съѣзда преподавателей мат-ки и изъ доходовъ отъ продажи «Трудовъ» и «Указателя» и выдается: или за такой **учебникъ алгебры** для средней школы, въ которомъ черезъ весь курсъ проведена и на примѣрахъ изъ геометріи, физики, механики, космографіи, статистики и пр. ярко освѣщена идея функціональной зависимости*), или за математическую хрестоматію, которая должна обнимать:

1) Статьи выясняющія значеніе математики, какъ науки.

2) Статьи дополняющія школьный курсъ математики и смежныя съ этимъ курсомъ ученія, напримѣръ: опредѣлители, уравненія, вѣроятности, нѣкоторыя части проективной геометріи, ученіе о многогранникахъ, теорема Моавра и примѣненіе ея и пр.

3) Статьи углубляющія и болѣе научно излагающія нѣкоторыя части элементарнаго курса математики. Напримѣръ: общелогическія ученія, соприкасающіяся съ математикой; развитіе понятія о числѣ; аксіоматика геометріи и пр.

4) Статьи относящіяся къ исторіи математики, причемъ необходимъ и общій историческій очеркъ (въ связи съ культурой), и болѣе детальная разработка такихъ вопросовъ,

*) См. резолюцію Съѣзда (Томъ I, стр. 568, 560).

какъ квадратура круга, дѣленіе окружности на равныя части, удвоеніе куба, развитіе анализа и пр. При этомъ весьма желательно, чтобы большая часть статей хрестоматіи была составлена по первоисточникамъ—въ переводѣ ихъ или въ обработкѣ (Архимедъ, Ньютонъ, Лейбницъ и пр.) *).

§ 2. Премія можетъ быть присуждена за тѣ печатныя сочиненія, отвѣчающія по своему содержанію § 1-му, которыя вышли въ свѣтъ въ промежутокъ между 1-мъ января 1912 г. и 1-мъ сентября 1917 года.

§ 3. Премія за сочиненія эти, по предварительномъ разсмотрѣніи ихъ въ открытыхъ засѣданіяхъ Отдѣла Математики Педагогическаго Музея В. Уч. Зав., присуждается Особой Комиссіей, созываемой директоромъ Музея изъ членовъ Организаціоннаго Комитета 1-го Всеросс. Съѣзда преподавателей математики и чаеновъ названнаго Отдѣла. Вопросъ о преміи рѣшается въ Комиссіи простымъ большинствомъ голосомъ.

§ 4. На обложкѣ премированной книги автору предоставляется право указать, что она удостоена преміи 1-го Всероссійскаго Съѣзда преподавателей математики.

VI) Если къ 1-му января 1915 г. изъ остатковъ отъ суммы 1-го Съѣзда и доходовъ отъ продажи «Трудовъ» и «Указателя» не наростетъ сумма въ 300 р., то всѣ накопившіяся деньги обращаются на изданіе «Трудовъ 2-го Всероссійскаго Съѣзда преподавателей математики», на ту-же надобность обращаются тогда и всѣ дальнѣйшія поступленія за «Труды» 1-го Съѣзда и «Указателя».

*) Частью могутъ быть использованы для хрестоматіи статьи, помѣщенныя въ «Математическомъ листкѣ» А. И. Гольденберга, на что имѣется согласіе вдовы покойнаго, А. И. Гольденбергъ.

КРАТКІЙ ОТЧЕТЪ

о суммахъ I Всероссійскаго Съѣзда преподавателей математики къ 19 ноября 1913 года.

Приходъ.

1) Получено заимообразно	500 р.	— к.
2) Членскихъ взносовъ (1222 №№ за исключеніемъ 6) по 3 р. и одинъ въ 5 руб. (вмѣстѣ съ добавками на пересылку или отвѣтъ)	3650 „	38 „
Плата за пользованіе квартирами 115 по 3 р. 50 к. .	402 „	50 „
4) Отъ продажи указателя по математикѣ	161 „	07 „
5) Подписка на «Труды»	1526 „	— „
6) По почтѣ получено за «Труды» съ 26 февраля 1913 г. . . .	1847 „	47 „
7) Продано 89 экз. I т. и 43 экз. II тома . .	298 „	95 „
8) За объявленія во II томѣ	65 „	— „
9) Субсидіи:		
Главнаго Управл. в.-уч. заведеній . 500 р. — к.		
Минист. Народн. Просв. . 1000 „ — „		
Мин. Торговли и Промышленности 998 „ 50 „		
	2498 р.	50 к.
сего въ приходѣ .	10949 р.	87 к.

Расходъ.

1) Возвращенъ долгъ	500 р.	— к.
2) Канцелярскихъ, почтовыхъ и друг. расходовъ по созыву, открытію и закрытію съѣзда	728 „	30 „
3) Типографскихъ расходовъ на обращенія, извѣщенія, бюллетени и резолюціи	640 „	72 „
4) Изданіе указателя математической литературы	186 „	— „
5) Устройство квартиръ для членовъ съѣзда	374 „	30 „
6) Устройство и разборка выставки . .	388 „	48 „
7) Освѣщеніе помѣщенія и прислуга .	134 „	— „
8) Стенографированіе преній	352 „	— „
9) Изданіе I тома . .	3541 „	37 „
10) Изданіе II тома . .	1771 „	25 „
11) Разсылка I и II том.	1423 „	04 „
Всего въ расходѣ .	10039 р.	46 к.
На лицо	910 „	41 „
	10949 р.	87 к.

Казначей *Д. Теннеръ.*

Предсѣдатель Ревизіонной Комиссіи *П. Некрасовъ.*

Члены Комиссіи: *С. Богомоловъ.*

Международная Комиссія по преподаванію математики.

(Очеркъ дѣятельности).

Докладъ проф. Д. М. Синцова.

9 — 16 августа этого года соберется въ Кембриджѣ V Международный Математическій Конгрессъ. Умѣстно и своевременно поэтому попытаться подвести нѣкоторые итоги той работѣ, которая сдѣлана со времени IV (Римскаго) Конгресса 1908 г. и отчетъ о которой долженъ былъ быть доложенъ Кембриджскому Конгрессу.

Я говорю о дѣятельности Международной Комиссіи по преподаванію математики, которая была создана на IV Международномъ Конгрессѣ въ Римѣ по почину и предложенію D. E. Smith'a, и которая получила за это время такое развитіе, какого, можетъ-быть, не ожидалъ самъ иниціаторъ, и, во всякомъ случаѣ, не предполагали тѣ, кто вотировалъ это предложеніе въ засѣданіи 4-ой секціи Конгресса 9 и 11 апрѣля 1908 г. (н. ст.).

Мнѣ приводилось уже не одинъ разъ давать отчеты о дѣятельности Комиссіи, начиная съ отчета о самомъ Римскомъ съѣздѣ [1]), затѣмъ о Брюссельскомъ Собраніи дѣятелей комиссіи въ 1910 году [2]) и о Миланскомъ съѣздѣ 1911 года [3]).

Я поэтому былъ очень радъ, когда ко мнѣ обратились, съ одной стороны, Организаціонный Комитетъ I Всероссійскаго Съѣзда преподавателей математики, съ другой — редакція «Математическаго Образованія» предложила мнѣ дать опросъ дѣятельности Комиссіи.

[1]) «Вѣстникъ Опытной Физики» № 460.

[2]) Ib., № 524, 525.

[3]) Ib., № 550.

Я чувствую себя въ долгу передъ русскою математической публикою, ибо по нѣкоторымъ обстоятельствамъ не могъ сдѣлать предположеннаго доклада на съѣздѣ.

Да будетъ мнѣ позволено, однако, возмѣстить этотъ свой долгъ хотя на страницахъ «Трудовъ» съѣзда, который, въ свою очередь, не могъ не оказать вліянія на характеръ настоящаго очерка: если раньше я имѣлъ нѣкоторыя основанія сомнѣваться въ интересѣ русскихъ педагоговъ-математиковъ къ вопросамъ такъ называемой «реформы» математическаго преподаванія, то теперь послѣ Съѣзда я знаю, что если она имѣетъ противниковъ, то она имѣетъ и сторонниковъ, убѣжденныхъ въ ея необходимости.

И это даетъ мнѣ больше смѣлости снова писать о дѣятельности Международной Комиссіи по преподаванію математики.

Но вліяніе съѣзда на эту статью сказывается еще и въ другомъ отношеніи,—на выборѣ, который я дѣлаю изъ матеріала, въ изобиліи собраннаго дѣятелями комиссіи. Исчерпать его въ предѣлахъ краткой статьи, которая могла бы быть прочитана на съѣздѣ, невозможно. Объ этомъ слѣдовало бы написать цѣлую книгу. Приходится поэтому ограничивать себя и выбирать одно, оставляя другое, быть-можетъ, не менѣе важное и интересное.

Изъ прочитанныхъ на Съѣздѣ докладовъ я убѣдился, что съ дѣятельностью комиссіи въ Германіи, тѣсно связанной съ именемъ проф. Ф. Клейна, стоящаго во главѣ движенія въ пользу реформы въ Германіи и составляющаго самую душу дѣятельности Комиссіи, въ Россіи сравнительно знакомы. Равнымъ образомъ положеніе преподаванія математики во Франціи затрагивалось въ рѣчахъ, произнесенныхъ на съѣздѣ проф. К. А. Поссе и В. Б. Струве.—Тотъ матеріалъ, который я самъ собралъ для предполагавшагося доклада съѣзду, былъ мною самимъ отчасти использованъ въ другомъ моемъ очеркѣ,—предполагавшемся «докладѣ по вопросу объ объединеніи программъ средней и высшей школы». Но на съѣздѣ шла рѣчь о преподаваніи математики въ Швеціи. И какъ-разъ въ трудахъ Международной Комиссіи томъ, изданный шведскою деле-

гацией и посвященный преподаванію математики въ Швеціи, занимаетъ одно изъ выдающихся мѣстъ. Я хочу поэтому, въ измѣненіе первоначальнаго плана, отбросить то, что я собирался говорить о дѣятельности германской и французской національныхъ подкомиссій и остановиться подробнѣе именно на Швеціи.

Было бы, конечно, интересно говорить о постановкѣ преподаванія математики въ Италіи, Англіи и Америкѣ, но труды этихъ подкомиссій еще не опубликованы вполнѣ, и потому о нихъ умѣстно будетъ говорить впослѣдствіи.

На Римскомъ Конгрессѣ постановленіе объ организаціи международной комиссіи, внесенное D. E. Smith'омъ и Archenhold'омъ въ засѣданіи IV секціи 9 апрѣля, вылилось въ формѣ слѣдующаго постановленія, принятаго въ засѣданіи секціи 11 апрѣля и всѣмъ конгрессомъ въ заключительномъ общемъ собраніи въ тотъ же день: «Конгрессъ, признавая важность сравнительнаго изученія программъ и методовъ преподаванія математики въ среднихъ школахъ у различныхъ націй, поручаетъ Клейну, Гринхиллю и Фэру дѣло организаціи Международной Комиссіи, которая изучила бы вопросъ и представила бы отчетъ ближайшему конгрессу».

Такъ организовалось это международное бюро, въ которомъ представитель Германіи, проф. Ф. Клейнъ, сталъ предсѣдателемъ, маститый Sir George Greenhill (Лондонъ)—товарищемъ предсѣдателя и проф. H. Fehr (Женева)—секретаремъ, а редактируемый послѣднимъ журналъ «Enseignement Mathématique» сдѣлался оффиціальнымъ органомъ Комиссіи.

Въ сентябрѣ того же года члены Комитета собрались въ Кёльнѣ и приняли предварительный докладъ объ организаціи Комиссіи и объ общемъ планѣ ея работы.

Ими было рѣшено организовать въ каждой странѣ [1]), которая была достаточнымъ образомъ представлена на Международныхъ Математическихъ Конгрессахъ (имѣла, въ среднемъ, не менѣе 10 представителей), національныя подко-

[1]) Эти страны, назыв. участвующими, суть: Германія, Австрія, Сѣв.-Ам. Соед. Штаты, Франція, Венгрія, Великобританія, Италія, Россія и Швейцарія (имѣютъ по 3 делегата), Бельгія, Данія, Испанія, Греція, Голландія, Норвегія, Португалія, Румынія, Швеція (по 1 делегату) и присоединенная позже Японія.

миссіи, съ делегатами, членами международной Комиссіи во главѣ, которыя взяли бы на себя организацію составленія отчетовъ, каждая въ своей странѣ, и кооптировали бы себѣ по мѣрѣ надобности новыхъ членовъ, которые, однако, являются лишь членами національныхъ подкомиссій, но не самой Комиссіи (на практикѣ, впрочемъ, различіе это мало ощутительно). Бюро составило Центральный Комитетъ, объединяющій дѣятельность національныхъ подкомиссій и на первыхъ порахъ занявшійся прежде всего ихъ организаціей.

Предварительный докладъ, напечатанный «Enseignement Mathématique» 15. XI. 1908, былъ переведенъ и переизданъ въ рядѣ странъ, участвующихъ въ Комиссіи.

Въ Россіи, делегацію которой составили Предсѣдатель Ученаго Комитета Министерства Нар. Просв. ак. Н. Я. Сонинъ и Члены Комитета—проф. Б. М. Кояловичъ и К. В. Фохтъ, дир. 2 Спб. р. уч., онъ былъ переведенъ и помѣщенъ въ «Журналѣ Мин. Нар. Просв.» 1909 г. и перепечатанъ въ «Московскомъ Математич. Сборникѣ» т. 27, № 1, «Кіевскихъ Университетскихъ Извѣстіяхъ» 1909 г. № 11, «Техническомъ и Коммерческомъ Образованіи» 1909 г. № 3 и др., а также разосланъ во всѣ ученыя общества и учрежденія, имѣющія отношеніе къ преподаванію математики. Такимъ образомъ этотъ докладъ можетъ считаться достаточно знакомымъ русской математической публикѣ. Тѣмъ не менѣе, трудно обойти его и не остановиться на его содержаніи, ибо онъ характеризуетъ тѣ взгляды, съ которыми руководители дѣятельности Комиссіи приступали на работѣ, чего они хотѣли, ибо лишь при сравненіи съ этимъ можно правильно оцѣнить то, чего они достигли.

Соотвѣтственно заданію Римскаго Конгресса, предварительный докладъ главную цѣль Комиссіи полагаетъ въ томъ, чтобы произвести анкету и опубликовать общій отчетъ о современныхъ тенденціяхъ математическаго преподаванія въ различныхъ странахъ.

Необходимо обратить вниманіе не только на методы преподаванія и на учебные планы, но и на самую организацію обученія, не вдаваясь въ изложеніе ея историческаго развитія

и въ статистическія свѣдѣнія. Работа Комиссіи должна скорѣе стремиться выставить общіе принципы, которыми долженъ вдохновляться преподаватель, чѣмъ устанавливать единообразіе въ деталяхъ или вырабатывать программы, пригодныя для учебныхъ заведеній различныхъ странъ. Желательно, чтобы главные пункты докладовъ подверглись предварительному обсужденію въ собраніяхъ профессоровъ и въ обществахъ научныхъ, техническихъ и иныхъ, которыя интересуются успѣхами преподаванія математики. Предполагалось, что отчеты національныхъ подкомиссій будутъ доставлены генеральному секретарю, т.-е. проф. Феру, въ началѣ 1911 года, и что на пасхальныхъ каникулахъ 1911 года Комиссія соберется, чтобы сдѣлать общій обзоръ вопросовъ, поднятыхъ въ предварительномъ докладѣ, и установить основанія общаго доклада. Первоначальное заданіе Римскаго конгресса Центральный Комитетъ въ своемъ докладѣ значительно расширилъ, рѣшивъ не ограничивать своей работы преподаваніемъ математики въ средней школѣ, но распространить ее на всю совокупность математическаго обученія, съ первыхъ шаговъ до высшаго образованія, не ограничиваясь общеобразовательными учебными заведеніями, но изучая преподаваніе и въ школахъ техническихъ и профессіональныхъ.

Доклады національныхъ подкомиссій по мысли Комитета, должны въ первой своей части давать обзоръ современной организаціи обученія математикѣ, системы экзаменовъ, методовъ преподаванія и подготовки преподавательскаго персонала. Лишь послѣ этого можно будетъ изучить и ясно представить современныя тенденціи преподаванія, часто обнаруживающіяся въ характерѣ реформъ, принятыхъ въ послѣднее время, чему должна быть посвящена вторая часть отчетовъ. Соотвѣтственно этому Комитетъ намѣчалъ общій планъ отчетовъ въ такой схемѣ: I. Различные типы школъ. II. Цѣль преподаванія математики и отдѣлы ея, преподаваемые въ школѣ. III. Экзамены. IV. Методъ преподаванія. V. Подготовка кандидатовъ въ преподаватели.

Тѣ же подраздѣленія намѣчены и для второй части отчетовъ, но уже съ инымъ содержаніемъ; здѣсь должны найти

мѣсто: I. Современныя идеи, относящіяся къ организаціи школы, новые типы школъ, вопросъ о совмѣстномъ обученіи обоихъ половъ. II. Современныя тенденціи, относящіяся къ цѣлямъ математическаго образованія и къ предметамъ преподаванія: указаніе новыхъ отдѣловъ или главъ, которыми слѣдовало бы замѣстить отдѣлы, безполезные для дальнѣйшихъ частей науки или имѣющіе мало значенія, но сохраняемые въ силу традицій. Было бы полезно выяснить, въ какой мѣрѣ можно считаться съ требованіями введенія началъ анализа безконечно-малыхъ и аналитической геометріи, нѣкоторыхъ понятій по начертательной и проективной геометріи, а также изученія физики съ математической точки зрѣнія и введенія нѣкоторыхъ болѣе спеціальныхъ понятій (какъ понятій о функціи, о группахъ, объ ансамбляхъ). III. Проектъ преобразованія существующей системы экзаменовъ, а также полнаго ихъ устраненія. IV. Современныя идеи относительно методовъ преподаванія на различныхъ ступеняхъ и въ школахъ различныхъ типовъ (роль подготовительнаго преподаванія, необходимо ли предпосылать теоретическому курсу интуитивный пропедевтическій, и съ какого момента долженъ получать преобладающее значеніе чисто-логическій элементъ,—напр., въ элементарной геометріи и дифференціальномъ и интегральномъ исчисленіи). Практическія приложенія (складываніе бумаги, работы на открытомъ воздухѣ, практическіе и приближенные методы вычисленія, графики въ алгебрѣ, клѣтчатая бумага, вопросъ о математическихъ лабораторіяхъ и моделяхъ, изготовляемыхъ учащимися). Связь между различными отдѣлами математики (насколько возможно стереть условныя границы между геометріей и алгеброй, алгеброй и анализомъ безконечно-малыхъ, между евклидовой и аналитической геометріей, между геометріей и тригонометріей, въ частности, мѣсто наглядной геометріи по отношенію къ алгебрѣ, сліяніе планиметріи со стереометріей, болѣе тѣсное единеніе дифференціальнаго исчисленія съ интегральнымъ). Связь математики съ другими отраслями знаній, геометрическимъ и техническимъ черченіемъ и рисованіемъ, прикладными науками, съ физикой, химіей, біологіей, географіей и пр., съ философіей и съ практической жизнью. Воз-

можность и желательность сообщенія въ школѣ свѣдѣній по исторіи математики. V. По отношенію къ подготовкѣ преподавательскаго персонала анкета должна выяснить, что долженъ изучить кандидатъ въ преподаватели, насколько должны они знакомиться съ пріемами научныхъ изслѣдованій, какъ лучше излагать имъ теоретическую и практическую науку о воспитаніи, полъ преподавателя на различныхъ ступеняхъ обученія, время, которое слѣдовало бы удѣлять ознакомленію съ исторіей математики, исторіей ея преподаванія, съ математическими развлеченіями, съ общей литературой о математическомъ образованіи. Въ заключеніе Комитетъ приглашаетъ подчеркнуть характерныя черты предлагаемыхъ реформъ, указать и опасности, которыхъ слѣдуетъ избѣгать, и тѣ возраженія и аргументы, которые выставляются ихъ противниками. Такъ, желаніе сдѣлать изложеніе привлекательнымъ не должно понижать серьезности преподаванія; психологія, плохо понятая, могла бы привести или къ преувеличенному выдвиганію логическихъ основъ математики, или, наоборотъ, къ не менѣе вредному пренебреженію абстрактной стороной ея; сліяніе такихъ отдѣловъ, какъ алгебра и геометрія, можетъ повести къ утратѣ специфическихъ преимуществъ того и другого отдѣла.

Такимъ образомъ, намѣтивъ широкую программу, охватывающую всѣ вопросы математическаго преподаванія и математическаго образованія, Комитетъ желалъ бы возможной объективности, безъ излишнихъ увлеченій новшествами, но съ подведеніемъ итоговъ и констатированіемъ всего, что было прежде, и что внесено въ новѣйшее время въ область математической педагогики.

Конечно, вторая часть представляетъ и наибольшія трудности.

Выяснить наилучшіе методы и способы преподаванія, наиболѣе отвѣчающіе научнымъ требованіямъ и запросамъ жизни, если и возможно, то полученные отвѣты неизбѣжно будутъ имѣть лишь относительное, временное значеніе. Прогрессъ науки и измѣненіе условій человѣческаго существованія будутъ ставить все новыя задачи воспитанію и образованію вообще, и преподаванію математики, и самой роли ея въ вос-

питаніи — въ частности. И въ этомъ отношеніи даже для такой точной науки, какъ математика, возможны различныя воззрѣнія, возможны различные взгляды на то, что можно и должно преподавать, и на то, какъ можно и должно.

Національныя различія играютъ здѣсь, можетъ быть, меньшую роль, — если сила традиціи или культурная отсталость осуждаютъ въ иной странѣ математику на подчиненную роль въ школьномъ образованіи, это не можетъ мѣшать отдѣльнымъ просвѣщеннымъ представителямъ націи держаться наиболѣе прогрессивныхъ воззрѣній и стоять на одномъ уровнѣ съ представителями болѣе передовыхъ націй. Съ другой стороны, цѣлый рядъ намѣченныхъ вопросовъ, хотя бы вопросъ объ экзаменахъ или о значеніи совмѣстнаго обученія мальчиковъ и дѣвочекъ, выходитъ за предѣлы только преподаванія математики. Это — вопросы обще-педагогическіе, и по отношенію къ нимъ компетентны педагоги вообще.

Понятно поэтому, что дѣятельность Комиссіи сосредоточилась, главнымъ образомъ, на первой задачѣ. Первый годъ ушелъ на подготовительную организаціонную работу, на образованіе національныхъ подкомиссій. Центральному Комитету приходилось иногда прибѣгать даже къ дипломатическому посредничеству.

Собравшись въ Карлсруэ 5—6 апрѣля 1909 г., Комитетъ подвелъ итогъ сдѣланному въ различныхъ странахъ: изъ 18 участвующихъ странъ делегаціи были уже организованы въ 16 (кромѣ Бельгіи и Великобританіи [1]). На собраніи въ Базелѣ 28 XII того же года [2]) Комитетъ могъ уже констатировать организацію дѣла и въ этихъ двухъ странахъ: въ Бельгіи роль делегата принялъ на себя проф. льежскаго университета J. Neuberg, соредакторъ журнала «Mathesis» и одинъ изъ основателей геометріи треугольника, организовавшій бельгійскую подкомиссію. Въ Англіи Sir G. Greenhill заручился содѣйствіемъ Board of Education — учрежденія, не вполнѣ соотвѣтствующаго нашимъ оффиціальнымъ учрежденіямъ, — не столько завѣдывающаго народнымъ образованіемъ, сколько

[1]) См. циркуляръ Комитета № 1, «Enseignement mathém.» 15. V. 1909 г.
[2]) Цирк. № 2, «Ens. math.», 15. III 1910 г.

играющаго роль центральнаго статистическаго комитета по народному образованію.

Въ настоящее время закончены и отпечатаны доклады подкомиссій французской, голландской, шведской и швейцарской.

Очень много сдѣлала германская подкомиссія, подъ личнымъ руководствомъ проф. Клейна: ею уже опубликовано 20 выпусковъ изъ числа проектированныхъ пяти томовъ [1]). Но значительное разнообразіе постановки преподаванія въ различныхъ автономныхъ единицахъ, входящихъ въ составъ Германской имперіи, очень умножаетъ число отдѣльныхъ отчетовъ, а стремленіе дать выраженіе различнымъ сторонамъ дѣла, такъ или иначе связаннымъ съ преподаваніемъ математики, значительно увеличили первоначально проектированное число рефератовъ. Это выяснилось уже на Миланскомъ съѣздѣ, гдѣ проф. Клейнъ сообщилъ намъ, что у германской подкомиссіи останется работы еще на годъ послѣ Кембриджскаго съѣзда.

Германская система публикаціи отдѣльныхъ выпусковъ принята и въ Австріи, національная подкомиссія которой также выпустила цѣлый рядъ отчетовъ (до сего времени 20 отчетовъ въ 11 тетрадяхъ), которые въ цѣляхъ болѣе широкаго ихъ распространенія среди австрійскихъ педагоговъ безплатно прилагаются къ двумъ австрійскимъ педагогическимъ журналамъ: «Zeitschrift für d. österreichischen Gymnasien» и «Zeitschrift für das Realschulwesen».

Ту же систему приняла и Венгрія, гдѣ изъ 12 намѣченныхъ отдѣльныхъ отчетовъ пока опубликовано четыре (о техническихъ школахъ, о подготовкѣ преподавателей для среднихъ учебныхъ заведеній и для народныхъ школъ и объ опытной гимназіи для первыхъ).

Но французская система опубликованія отчетовъ не отдѣльными выпусками, а сразу, оказалась для завершенія дѣла лучшею.

То, что было на брюссельской конференціи въ августѣ 1910 г.

[1]) Распредѣленіе матеріала въ нихъ таково: 1) Среднія школы въ Сѣверной Германіи. 2) Среднія школы въ Южной и Средней Германіи. 3) Отдѣльные вопросы математическаго преподаванія. 4) Математика въ техническихъ школахъ. 5) Математика въ народныхъ школахъ и учительскихъ институтахъ.

обѣщано отъ имени французской подкомиссіи ея представителемъ, C. Bourlet, то къ Миланскому съѣзду въ сентябрѣ 1911 г. оказалось и выполненнымъ. Маститый предсѣдатель французской подкомиссіи, A. de St. Germain, съ чувствомъ законной гордости представилъ собранію вполнѣ готовые и отпечатанные всѣ пять томовъ французскаго отчета [1]). Отчеты эти въ высшей степени интересны и поучительны, особенно томы, касающіеся средняго и высшаго образованія. Но, излагая хорошо, сжато, безъ лишняго многословія современное положеніе дѣла преподаванія математики, какъ оно сложилось послѣ реформъ 1902—1905 гг., и вкратцѣ давая даже историческую перспективу, эти отчеты сравнительно мало удѣляютъ мѣста второй части программы. Отвѣты на поставленные въ ней вопросы, пожалуй, даже и есть, но они разбросаны въ видѣ отдѣльныхъ замѣчаній, и можно, пожалуй, согласиться, что къ пяти томамъ хорошо бы прибавить еще 6-ой, дающій общіе выводы, которые невольно напрашиваются при чтеніи того или другого тома и его сравненіи съ предварительнымъ докладомъ.

Но и система работы, усвоенная германской подкомиссіей, имѣетъ свои достоинства.

Конечно, при ней попадаетъ въ печать подчасъ кое-что лишнее и мало интересное, но зато получается не мало интереснѣйшихъ детальныхъ изслѣдованій, которымъ не нашлось бы мѣста, будь вся работа уложена въ строго размѣренныя рамки. Укажемъ, напр., на работу Timerding'a — «Математика въ учебникахъ физики», въ которой онъ показываетъ, какъ необходимость введенія нѣкоторыхъ понятій такъ называемой высшей математики и невозможность на нихъ опираться заставляетъ физиковъ прибѣгать въ качествѣ суррогата къ методамъ, существовавшимъ до изобрѣтенія анализа безконечно-малыхъ; укажемъ далѣе интересную монографію движенія въ пользу реформы преподаванія въ Германіи, написанную Р. Шимманомъ. Поучительны обзоры учебной математической литера-

[1]) Т. I. «Начальное образованіе» подъ ред. Ch. Bioche. Т. II. «Среднее образованіе» подъ ред. Ch. Bioche. Т. III. «Высшее образованіе» подъ ред. A. de St. Germain. Т. IV. «Техническое образованіе», подъ ред. P. Rollet. Т. V. «Женское образованіе», подъ ред. M-lle Amieux. Изданіе Hachette, Paris.

туры, составленные В. Лицманномъ для среднихъ и научныхъ школъ [1]). А его же «Die Organisation des mathematischen Unterrichts an den höheren Knabenschulen in Preussen» даетъ интересный образчикъ примѣненія системы объѣзда референтомъ интересныхъ въ томъ или другомъ отношеніи учебныхъ заведеній.

Весьма интересна и своеобразна организація дѣятельности американской національной подкомиссіи. Американская делегація: D. E. Smith, W. Osgood, J. W.-A. Young избрала президентомъ D. E. Smith'a и организовала особый при себѣ совѣтъ въ составѣ настоящаго и бывшихъ комиссаровъ по народному образованію (United States Comissioner of Education), настоящаго и бывшихъ предсѣдателей Американскаго Математическаго Общества и Американской федераціи преподавателей математическихъ и естественныхъ наукъ, президентовъ трехъ большихъ американскихъ университетовъ Harvard (Cambridge, Man.), Chicago (Chicago) и Columbia (New-York City) въ качествѣ совѣщательнаго органа для обсужденія болѣе важныхъ вопросовъ. Составлена обширная организація, распредѣляющая работу на 16 комитетовъ, подраздѣляющихся, въ свою очередь, на 77 подкомиссій; изъ нихъ 10 комитетовъ составляютъ отчеты съ подраздѣленіями, указанными въ планѣ центральнаго комитета, по различнымъ типамъ школъ; изъ предметовъ занятій другихъ отмѣтимъ: VIII подготовка преподавателей общественныхъ школъ (въ чемъ особая подкомиссія. 4. Ошибки въ методахъ преподаванія, ихъ природа, ихъ причины и средства противъ нихъ). XI. Вліянія, стремящіяся улучшить работу учителя (1. Періодическія изданія; 2. Ассоціаціи учителей, въ томъ числѣ кружки для чтенія; 3. Учительскіе институты; 4. Надзоръ за учителями со стороны Государства; 5. Работы издателей и ихъ агентовъ). Отчеты подкомитетами и комитетами даются о современномъ состояніи и о предложеніяхъ измѣненій, сдѣланныхъ достаточнымъ числомъ преподавателей, но могутъ выражать и соб-

[1]) «Stoff u. Methode im mathematischen Unterricht der Norddeutschen höheren Schulen auf Grund der vorhandenen Lehrbüchern» (I. 1.); его же «Stoff. u. Methode des Rechenunterichts in Deutschland» (W. 1.) и еще не опубликованная «Stoff u. Methode d. Raumlehreunterrichts» etc. (V. 2).

ственныя пожеланія комитетовъ. Объемъ отчетовъ не ограниченъ. Подкомитеты представляютъ ихъ своимъ комитетамъ, составляющимъ на ихъ основаніи свои отчеты съ собственными, если понадобится, замѣчаніями. Отчеты комитетовъ направляются въ національную американскую подкомиссію для составленія окончательнаго отчета. Выражалось желаніе предварительнаго обсужденія отдѣльныхъ отчетовъ подкомиссіи на съѣздахъ и въ періодическихъ изданіяхъ. Въ циркулярѣ 4 центральнаго комитета («Ens. math.», 15. III. 1911) сообщается, что всѣ подготовительныя работы закончены, отчеты подкомитетовъ частью будутъ напечатаны въ различныхъ изданіяхъ, а общій отчетъ будетъ опубликованъ Bureau of Education. Изъ отдѣльныхъ отчетовъ три напечатаны въ «Bulletin of the American Mathematical Society»: XIV. 1. Университетскіе курсы математики и степень магистра (Vol. XVII, n° 5, с. 230—249), 2. (Vol. XVII, n° 6, с. 305—311) Подготовка къ научнымъ изслѣдованіямъ и степень доктора математики. 3. Подготовка инструкторовъ по математикѣ для колледжей и университетовъ (Vol. XVII, n° 2, с. 77—100). Говорить о нихъ подробнѣе лучше, однако, послѣ появленія всѣхъ работъ американской комиссіи.

Изъ законченныхъ отчетовъ значительный интересъ представляетъ отчетъ шведской подкомиссіи, изданный проф. H. v. Koch и Oberlehrer'омъ E. Göransson. Какъ говорятъ они во вступительной статьѣ, вопросъ о цѣли математическаго преподаванія въ школѣ и въ связи съ этимъ изысканіе наиболѣе подходящаго способа организаціи этого преподаванія давно уже дебатируется въ педагогическихъ кругахъ Швеціи. Были и есть въ Швеціи представители мнѣнія, что математика должна играть, главнымъ образомъ, служебную роль, должна служить орудіемъ для практической жизни и для извѣстныхъ искусствъ и наукъ, и что поэтому изъ учебнаго плана надо исключить всѣ тѣ части, которыя не служатъ этой цѣли. Но было въ Швеціи достаточно представителей и противоположнаго воззрѣнія, что главнѣйшею задачею математики въ школѣ является развитіе мыслительной способности ученика, какъ въ формальномъ, такъ и въ реальномъ отношеніяхъ. Сторонники этого взгляда трудились надъ преобразованіемъ преподаванія

въ этомъ направленіи. Эти противоположныя теченія увѣнчивались попеременнымъ успѣхомъ, и въ настоящее время дѣло стоитъ въ общемъ такъ, что обѣ точки зрѣнія нашли извѣстное признаніе въ постановкѣ преподаванія въ разнаго рода школахъ.

Какъ особенно важное съ указанныхъ точекъ зрѣнія совершенно справедливо выставляютъ, говорятъ H. v. Koch и E. Göransson, понятіе о функціи вмѣстѣ съ соотвѣтствующими графическими представленіями, и въ послѣднее время въ Швеціи, какъ и въ другихъ культурныхъ странахъ, обращено вниманіе на значеніе этого понятія для всего міросозерцанія и, посредственно, для развитія характера юношества. Указывается, что это понятіе является основнымъ для пониманія явленій природы и ихъ взаимной связи и, слѣдовательно, въ извѣстной степени для пониманія самыхъ явленій человѣческой жизни. Швеція не осталась въ сторонѣ отъ могучаго реформаціоннаго движенія, захватившаго въ послѣднее десятилѣтіе всю Европу,—тому свидѣтельствомъ новые учебные планы, примѣчательные во многихъ отношеніяхъ, которые установлены для реальныхъ училищъ и для гимназій. Существенная ихъ особенность—введеніе понятія о функціи, а для реальныхъ гимназій—и началъ анализа безконечно-малыхъ. Затруднительный вопросъ о томъ, въ какой мѣрѣ надо ограничить и переработать другія части предмета, чтобы дать мѣсто этимъ новшествамъ, намѣченъ этимъ учебнымъ планомъ, но такое рѣшеніе не считается шведскими педагогами окончательнымъ, такъ какъ не хватаетъ еще достаточнаго опыта. И отчетъ не ограничивается констатированіемъ фактическаго положенія вещей, но и указываетъ по всѣмъ пунктамъ, въ какихъ направленіяхъ намѣчаются желательныя измѣненія. Я оставляю въ сторонѣ вопросъ о математикѣ въ народной школѣ Швеціи, хотя отмѣчу мимоходомъ, что, кромѣ ариѳметики, проходится и геометрія, при чемъ планиметрія не отдѣляется отъ стереометріи, но въ каждый изъ двухъ лѣтъ ученія проходятъ нѣкоторыя плоскія фигуры и пространственныя, которыя на нихъ опираются. Курсъ этотъ эмпирическаго характера, съ практическою цѣлью «чертить, описывать и измѣрять», и соеди-

няется съ курсомъ линейнаго черченія. Что же касается народныхъ школъ высшаго разряда—высшихъ народныхъ школъ (отчетъ называетъ ихъ Fortsetzungsschulen),—не многихъ по числу (въ 1909 г. ихъ было 31 съ 1000 учениками и ученицами), но важныхъ по положенію въ системѣ, а также по задачѣ и хорошему въ общемъ устройству, то ихъ курсъ совпадаетъ приблизительно съ курсомъ реальныхъ училищъ. Я остановлюсь, главнымъ образомъ, на среднихъ учебныхъ заведеніяхъ.

Съ 1904 г. общеобразовательныя среднія учебныя заведенія Швеціи раздѣлены на гимназіи и реальныя училища, и школы болѣе низкаго типа преобразованы въ реальныя училища. Реальное училище состоитъ изъ 6 одногодичныхъ классовъ, съ 5 уроками математики во 2-мъ, 3-мъ, 4-мъ и 6-мъ классахъ и съ 4 уроками въ 1-мъ и 5-мъ. Реальное училище имѣетъ цѣлью, выходя изъ области, гдѣ дѣйствуетъ народная школа, давать общее образованіе для среднихъ классовъ («allgemeine bürgerliche Bildung», какъ выражается отчетъ, отдавая дань сословному строю Швеціи). Въ учебномъ планѣ цѣлью преподаванія математики ставится дать учащимся знанье и умѣніе производить ариѳметическія дѣйствія, въ особенности въ приложеніи къ задачамъ обыденной жизни, а также освоенность съ элементарными понятіями и методами геометріи въ объемѣ, соотвѣтствующемъ требованіямъ общаго образованія и въ то же время достаточномъ для подготовки къ тѣмъ заведеніямъ для продолженія образованія, которыя примыкаютъ къ реальному училищу. Въ ариѳметикѣ очень рано начинается счетъ съ децималями (Dezimalen),—чтобы не говорить еще о дробяхъ вообще,—тройное правило самимъ учебнымъ планомъ ограничивается легкими примѣрами, для которыхъ оно дѣйствительно является методомъ рѣшенія; правило процентовъ въ 3-мъ классѣ должно ограничиваться примѣрами, гдѣ разыскивается процентъ. Понятіе объ ирраціональномъ числѣ, если время позволитъ, вводится въ пятомъ, въ противномъ случаѣ, въ 6-мъ классѣ. Учебный планъ подчеркиваетъ, что планиметрическія задачи на вычисленіе составляютъ естественный исходный пунктъ для введенія ирраціональныхъ чиселъ, указывая въ противоположность предложеніямъ комиссіи 1902 г.,

что безъ квадратичныхъ ирраціональностей область преподаванія была бы слишкомъ сужена; однако, вмѣсто обычнаго пріема извлеченія квадратныхъ корней предлагается пользоваться таблицами [1]), для объясненія которыхъ предлагается, чтобы ученики сами вычислили рядъ корней изъ чиселъ графическимъ путемъ при помощи діаграммы $y=x^2$, можетъ-быть, съ приложеніемъ теоремы Пиѳагора, и такимъ путемъ составили бы сами часть таблицы квадратныхъ корней. Это новшество вызвало очень мало возраженій. При анкетѣ, организованной шведской подкомиссіей, поступило только два возраженія, при чемъ въ одномъ случаѣ требовалось полное устраненіе ученія объ ирраціональныхъ числахъ изъ курса средней школы, мотивированное плохими результатами, обнаруженными на экзаменахъ и зависящими отъ недостатка хорошихъ учебниковъ и неспособности учителей отрѣшиться отъ привычныхъ пріемовъ изслѣдованія и перейти къ новымъ. Относительно геометріи Отчетомъ отмѣчается, что Швеція едва ли не раньше другихъ странъ, еще съ 1820 г., ввела пропедевтическій курсъ, имѣвшій цѣлью подготовить учениковъ къ систематическому курсу, сдѣлавъ имъ знакомыми основныя геометрическія понятія, но выродившійся въ отдѣльный отъ геометріи курсъ «Anschauungslehre» и линейнаго черченія. Въ настоящее время этотъ пропедевтическій курсъ сопровождается упражненіями въ измѣреніяхъ, напр., въ различномъ объемѣ, въ различныхъ заведеніяхъ, и изъ 60 отвѣтовъ и писемъ по этому вопросу только два отзываются отрицательно, большая же часть считаетъ его единственнымъ правильнымъ методомъ начальнаго преподаванія геометріи и указываетъ на вызываемый имъ интересъ. Въ дальнѣйшемъ ходѣ занятій, помимо точныхъ построеній, рекомендуется планомъ вычерчиваніе діаграммъ и пр. Интересно отмѣтить, что, подчеркивая какъ цѣль и задачу преподаванія геометріи развитіе полнаго пространственнаго возрѣнія, учебный планъ предоставляетъ преподавателю устанавливать въ зависимости отъ состава класса тотъ объемъ, въ которомъ онъ пройдетъ обязательный для 6-го класса курсъ началъ стереометріи.

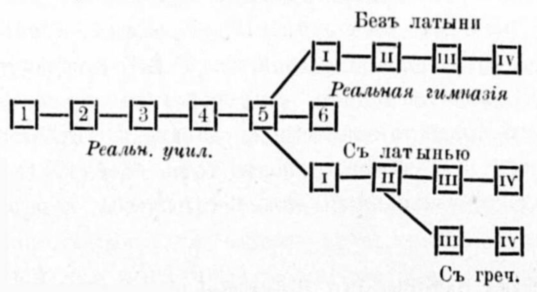
[1]) Такія таблицы изданы Hagström. 1907, Hedström—Rehndal 1910, Malmborg—Norén 1910.

Нельзя обойти также молчаніемъ, что новый учебный планъ сдѣлалъ то, чего не могли подѣлать всѣ разсужденія въ теченіе всего XIX столѣтія: державшееся въ силу вѣковой традиціи преподаваніе по «Началамъ» Евклида быстро исчезаетъ (хотя учебный планъ и даетъ указаніе, какъ это дѣлать), послѣ въ 1904—5 уч. году, въ 60 школахъ пользовались Евклидомъ, и только въ 15—новыми книгами, то черезъ четыре года въ 1908—9 г. цифры почти обратныя.

Переходимъ теперь къ гимназіямъ, имѣющимъ за собою въ Швеціи долгую исторію,—первая основана Густавомъ II Адольфомъ въ 1620 г. Въ настоящее время, въ результатѣ послѣдней реформы 1905 г., учащійся продѣлываетъ 5 первыхъ лѣтъ въ реальномъ училищѣ, гдѣ преподаваніе свободно отъ латинскаго языка, и лишь затѣмъ начинается бифуркація: или ученикъ переходитъ въ 6-й классъ реальнаго и въ немъ оканчиваетъ, или же переходитъ въ гимназію реальную или латинскую, въ которой и остается еще 4 года, при чемъ въ латинской гимназіи онъ можетъ съ 3-го класса обратиться къ чисто-классическому отдѣленію безъ математики и рисованія, но съ греческимъ языкомъ [1]). Число часовъ, посвящаемыхъ математикѣ, таково:

	I	II	III	IV	**Итого.**	Дореформ.
Реальныхъ гимназій . .	7	6	6	6	25	26
Латинскихъ гимназій .	5	4	4	5	18	18
Латин. гимн., кл. отд. .	5	4	0	0	9	18

[1]) Вотъ схема взаимоотношенія:



Такимъ образомъ, число часовъ при произведенной реформѣ не увеличено, а даже уменьшено. Тѣмъ не менѣе, въ алгебрѣ дается примѣненіе прямоугольныхъ координатъ для графическаго изображенія и изученія простыхъ функцій; съ 3-го класса реальной гимназіи вводится, сверхъ того, понятіе о производной и аналитико-геометрическое изученіе кривыхъ 2-го порядка. Понятіе объ интегралѣ въ учебномъ планѣ не фигурируетъ, но во многихъ гимназіяхъ оно понятно было введено съ успѣхомъ и примѣнялось къ вычисленію площадей и объемовъ, и къ задачамъ динамики. Но я не буду останавливаться долѣе на интересномъ отчетѣ шведской подкомиссіи, который умѣло соединяетъ въ небольшомъ сравнительно объемѣ не только очеркъ современнаго положенія вещей въ связи съ прошлымъ преподаванія математики, но и указываетъ, какъ мы видѣли, и тѣ измѣненія, какія находятъ желательными шведскіе педагоги.

До извѣстной степени даютъ это послѣднее и другіе отчеты, напр., въ бельгійскій отчетъ включена статья H. Ploumen, Inspecteur de l'enseignement moyen: «Les tendances actuelles de l'enseignement mathématique en Belgique et leur influence sur les methodes et les programmes». Но если бы Международная комиссія выполнила одну только первую часть задачи,—дала бы только обстоятельный, составленный компетентными лицами, обзоръ того, какъ и въ какомъ объемѣ преподается математика въ различныхъ культурныхъ странахъ, то и тогда дѣло комиссіи надо было бы признать большимъ и въ высшей степени полезнымъ. Уже одна возможность сравненія положенія преподаванія въ своей странѣ съ тѣмъ, что дѣлается у сосѣдей, вызываетъ соревнованіе и освѣщаетъ путь, которому должно слѣдовать.

Но работа Комиссіи будетъ и при этомъ имѣть значеніе, конечно, и для второй части программы. Практика ея дѣятельности показала невыполнимость первоначальнаго заданія Римскаго Конгресса. Этотъ общій отчетъ, который долженъ былъ подвести итоги, очень интриговалъ первое время дѣятелей Комиссіи, и даже на Брюссельскомъ Собраніи о немъ еще говорили, хотя, пожалуй, болѣе неопредѣленно. На Миланскомъ Съѣздѣ стало ясно, что такого отчета,—по крайней

мѣрѣ Кембриджскому Конгрессу—представлено не будетъ; вмѣсто этого Предсѣдателемъ Комиссіи будетъ внесено предложеніе продолжить до слѣдующаго Конгресса работу Комиссіи. Но для меня лично ясно, что такого общаго отчета, какъ резюме всей дѣятельности Комиссіи, не будетъ и вообще. Будутъ закончены отчеты отдѣльныхъ національныхъ подкомиссій, и всякій желающій будетъ изъ нихъ черпать свѣдѣнія о фактическомъ положеніи преподаванія въ различныхъ странахъ. Матеріалъ этотъ будетъ несомнѣнно пополняться и освѣжаться регистраціей новыхъ мѣропріятій въ области учебнаго дѣла вообще и учебныхъ плановъ математики въ частности. Но вмѣсто общихъ отчетовъ жизнь выдвинула другое,—періодическіе съѣзды дѣятелей комиссіи, или вѣрнѣе, лицъ, интересующихся вопросомъ преподаванія математики во всемъ его объемѣ.

Такихъ Съѣздовъ было уже два—въ Брюсселѣ и Миланѣ. Успѣхъ этихъ опытовъ показываетъ, что и въ дальнѣйшемъ этимъ именно путемъ можно будетъ прійти къ хорошимъ результатамъ и въ области подведенія итоговъ. Вопросъ о томъ, какой методъ преподаванія той или другой математической дисциплины лучше, рѣшается не статистическимъ путемъ, какъ нельзя получить типичный портретъ математика, накладывая хотя бы сто портретовъ математиковъ одинъ на другой. Напротивъ, живой обмѣнъ мнѣній по вопросу, заранѣе намѣченному, можетъ дать несравненно больше. Такими вопросами на Миланскомъ Съѣздѣ были: 1) строгость въ математическомъ преподаваніи средней школы: въ какой степени можно въ средней школѣ придерживаться систематическаго изложенія математики; 2) вопросъ о сліяніи различныхъ вѣтвей математики въ средней школѣ; 3) каково должно быть математическое образованіе, теоретическое и практическое, для физиковъ и натуралистовъ.

На Кембриджскомъ Конгрессѣ послѣдній вопросъ будетъ обсуждаться снова въ отношеніи въ частности физиковъ (математика въ университетскихъ занятіяхъ физиковъ). Другой вопросъ, поставленный на порядокъ дня,—интуиція и опытъ въ преподаваніи математики въ средней школѣ [1]).

---

[1]) См. «Enseignement mathem.», 15. III. 1912, гдѣ приведены и опросные циркуляры C. Runge и W. Lietzmann'a.

Да позволено будетъ въ заключеніе остановиться на отношеніи работъ Международной Комиссіи въ Россіи. Русская подкомиссія къ Кембриджскому съѣзду почти закончитъ свою работу: изъ предположенныхъ 16 отчетовъ 10 уже отпечатаны, остается отпечатать еще 6 отчетовъ, которые уже представлены. Въ своей совокупности они даютъ представленіе, какова въ настоящее время организація преподаванія математики, каковы учебные планы и программы ея въ учебныхъ заведеніяхъ различныхъ типовъ. Этимъ заканчивается обязательная часть работъ,—то, что Россія должна сдѣлать для заграницы. Но намъ самимъ, можетъ-быть, важнѣе другое,—важно использовать возможно болѣе полно работу Комиссіи для насъ самихъ, для чего нужно прежде всего болѣе детальное знакомство русской математической публики съ результатами дѣятельности Комиссіи, съ постановкою и особенностями преподаванія математики въ различныхъ странахъ. Краткій отчетъ, въ родѣ настоящаго доклада, для этого недостаточенъ,—нужно что-нибудь болѣе детальное. Во-вторыхъ, опытъ Международной Комиссіи необходимо использовать въ томъ отношеніи, чтобы по примѣру нѣкоторыхъ странъ выполнить работы, безусловно необходимыя. Таковъ, напримѣръ, вопросъ объ обзорѣ существующихъ учебниковъ: для русскихъ педагоговъ было бы въ высшей степени полезно имѣть работу, подобную работамъ Лицманна, можетъ-быть, въ нѣсколько иномъ духѣ, скорѣе, критико-библіографическаго характера, нѣчто въ родѣ толковаго указателя наличной учебной литературы. Было бы желательно организовать и у насъ анкету, подобную той, которую устроила шведская подкомиссія. Словомъ, есть цѣлый рядъ работъ, которыя могутъ быть осуществлены лишь при дружной коллективной работѣ, блестящій примѣръ которой даетъ намъ Международная Комиссія по преподаванію математики.

О согласованіи программъ средней и высшей школы.

Докладъ проф. Д. М. Синцова (Харьковъ).

Вопросъ о согласованіи программъ школы средней и школы высшей можно понимать въ широкомъ смыслѣ и въ смыслѣ болѣе узкомъ. Въ широкомъ его можно понимать какъ вопросъ о взаимномъ отношеніи школы высшей и школы средней,—какъ вопросъ о томъ, какъ сдѣлать, чтобы были соблюдены оба основныхъ требованія: 1) средняя школа должна давать законченное образованіе, 2) средняя школа должна подготовлять къ высшей.

Если стать на эту точку зрѣнія, то вопросъ расширится далеко за предѣлы простого сравнительно вопроса о преподаваніи математики и, конечно, тогда долженъ быть взятъ во всей широтѣ: постановка учебнаго дѣла должна быть такова, чтобы начинающему учиться была обезпечена возможность пойти такъ далеко, какъ это требуютъ его способности, и насколько позволяютъ его жизненныя условія. Только тогда, когда каждому Ломоносову будетъ обезпечена возможность дойти до Академіи Наукъ, и каждому, вынужденному оставлять образованіе на томъ или другомъ этапѣ, пройденный путь будетъ давать достаточно общаго образованія для послѣдующей его дѣятельности, будетъ школьное обученіе доставлять наибольшую возможную пользу всѣмъ его получающимъ. Этой цѣли наша система, конечно, отвѣчаетъ лишь въ весьма слабой степени. Къ ней стремятся въ странахъ передовыхъ, напр., во Франціи. Несомнѣнно, только такая система отвѣчаетъ интересамъ и потребностямъ страны, въ особенности такой страны, какъ Россія. Возможность для лучшихъ учениковъ низшей школы продолжать образованіе въ средней, раздѣленіе средней школы на два цикла, дающіе каждый законченное образованіе,

сокращеніе курса классической гимназіи на 1 годъ и обращеніе VIII класса въ дополнительный (можетъ-быть, прибавка въ реальныхъ училищахъ одного года для уравненія тѣхъ и другихъ въ ихъ общемъ образованіи)—эта, такъ сказать, французская система встрѣтитъ, конечно, не менѣе противниковъ, чѣмъ сторонниковъ, и, можетъ-быть, удобнѣе на этомъ 1-омъ съѣздѣ не тратить времени на дебаты, а избрать комиссію, которая подготовила бы по этому вопросу докладъ къ слѣдующему съѣзду.

Перехожу къ болѣе узкой постановкѣ вопроса: насколько и какъ возможно согласовать курсъ средней и высшей школы, не производя коренной ломки существующаго школьнаго строя,—что возможно при измѣненіи программъ и методовъ преподаванія.

Можно утверждать, что согласованіе есть; но это согласованіе, такъ сказать, вынужденное: высшая школа получаетъ извѣстный матеріалъ, студенты являются съ извѣстной подготовкой. Мы принимаемъ ихъ такими, каковы они есть, и соотвѣтственно этому строимъ свои программы. Но и при условіи, что курсы математики, читаемые студентамъ 1-го семестра, не предполагаютъ никакихъ знаній сверхъ тѣхъ, которыя значатся въ утвержденныхъ программахъ, не всегда наши курсы оказываются понятными. Не всегда поступающіе въ университетъ, даже на математическій факультетъ, знаютъ хорошо математику. По личному опыту я убѣдился, что изъ 100 поступающихъ на 1-ый курсъ на второй переходятъ, или—лучше—остаются на 2-ой годъ на математическомъ отдѣленіи не свыше 60. Для 40 человѣкъ изъ 100 этотъ первый годъ оказывается въ значительной степени потеряннымъ. А если оцѣнивать въ 600 руб. стоимость этого года (если принять въ разсчетъ то, что затрачивается государствомъ на каждаго учащагося въ высшемъ учебномъ заведеніи, то надо цифру эту удвоить), то это дастъ на 100 студентовъ потерю въ 24000 руб. Считая въ Петербургѣ 800, Москвѣ 600, Кіевѣ 300, Одессѣ, Казани, Харьковѣ, Юрьевѣ, Варшавѣ по 100,—это дастъ 2200 поступающихъ и, слѣдовательно, ежегодную матеріальную потерю около 500000 руб. Не поддается оцѣнкѣ психологическое значеніе этой потери.

Отчего же это происходитъ? Здѣсь, конечно, не столь существенно, что студенты, даже хорошіе ученики, обыкновенно не помнятъ именно тѣхъ формулъ и соотношеній, которыя нужны намъ

$$\left(\text{напр.: } \operatorname{Cos}^2 x = \frac{1+\operatorname{Cos}2x}{2}, \quad \operatorname{Sin}^2 x = \frac{1-\operatorname{Cos}2x}{2}\right).$$

Важнѣе отсутствіе геометрическаго воображенія. Еще въ плоскихъ чертежахъ и фигурахъ студенты болѣе или менѣе разбираются, но пространственныя формы всегда для нихъ—камень преткновенія. Я бы сказалъ, однако, что еще болѣе существенное значеніе имѣетъ полное отсутствіе представленія о томъ, что такое высшая математика, благодаря полной разобщенности и даже извѣстному антагонизму средней и высшей школъ.

Какъ часто такъ называемые хорошіе математики средней школы, переходя черезъ порогъ университета, разочаровываются въ себѣ и въ математикѣ вообще. Вину за это нельзя возлагать на одну высшую школу: рѣзкость перехода должна быть сглажена съ обѣихъ сторонъ. Разгруженіе 1-го курса, можетъ-быть, нѣкоторый контроль за занятіями студентовъ (во Франціи въ высшей школѣ существуютъ спрашиванія—interrogations), введеніе нѣкоторыхъ курсовъ, которые служили бы соединительнымъ звеномъ между средней и высшей школой, какъ-то: введеніе въ анализъ, избранныя главы элементарной геометріи, какъ введеніе въ геометрію, исторія математики, преимущественно элементарной—это во власти высшей школы и можетъ быть ею сдѣлано (я говорю объ университетѣ). Но часть переработки въ сторону взаимнаго объединенія должна взять на себя и средняя школа. Она должна сдѣлать шагъ къ сближенію съ высшей школой и согласиться на расширеніе своихъ программъ. Различеніе элементарной или низшей математики и неэлементарной или высшей—чисто-искусственное; историкъ математики скажетъ вамъ, господа, что было время, когда ваша элементарная математика была высшей, такой высшей, что даже умноженіе цѣлыхъ чиселъ считалось доступнымъ только мудрецамъ. Не дѣтскимъ заня-

тіемъ было изученіе «Началъ Евклидовыхъ». И легче они, конечно, не стали оттого, что ихъ начинаютъ изучать не въ 18, а въ 14 лѣтъ. Въ исторіи вы не ограничиваете программу сверженіемъ Ромула-Августула, въ физикѣ не находите нужнымъ сообщать ученіе о теплородѣ, въ исторіи словесности русская литература не оканчивается на Третьяковскомъ. Только въ математикѣ ставятся границы доступнаго дѣтскому и юношескому уму тамъ, гдѣ начинается новая исторія математики. Только въ древнихъ языкахъ, языкахъ мертвыхъ, отбрасывается, какъ недостойное изученія, то, что написано послѣ золотого вѣка римской или греческой литературы. Но тамъ, вѣдь, наступилъ упадокъ, тамъ, подъ вліяніемъ напора варваровъ, произошло постепенное паденіе культуры, мѣсто изящной прозы и поэзіи заняла кухонная латынь. Этого нѣтъ въ исторіи математики. Не упадокъ ея начинается съ Декарта, Лейбница и Ньютона, а новая жизнь, имѣющая корень въ старой, не выбрасывающая ее за бортъ, а оживляющая и оплодотворяющая ее новыми идеями. Но школа консервативна. Отъ абака и дѣйствій съ нимъ мы почти отказались,—мы отправили его въ приготовительный классъ, гдѣ господа преподаватели приготовительнаго класса и обучаютъ дѣтишекъ искусству дѣйствій на счетахъ. Но сколько еще осталось дорогихъ покойниковъ въ курсѣ средней школы. Дорогого сердцу Магницкаго «гусинаго» и «дѣвичьяго» правила уже нѣтъ, но когда 35 лѣтъ тому назадъ я покупалъ ариѳметику Малинина и Буренина, нашъ учитель еще заставлялъ насъ вычеркивать напечатанное въ ней всѣми буквами «цѣпное правило». Теперь его, можетъ-быть, нѣтъ—не знаю; можетъ-быть, оно перешло въ курсъ коммерческой ариѳметики и заняло тамъ почетное мѣсто.

[Надо сказать, что мы, математики, очень грѣшимъ тѣмъ, что совершенно не занимаемся этимъ отдѣломъ, который выросъ въ цѣлую науку].

Но этого слишкомъ мало. Когда мы въ небольшомъ кружкѣ готовились къ съѣзду и толковали о предстоящихъ докладахъ, намъ рисовалась возможность цѣлаго ряда докладовъ, обосновывающихъ то или другое сокращеніе, казавшееся, можетъ-быть,

намъ самимъ нѣсколько смѣлымъ. Но когда я сталъ просматривать затѣмъ отчеты французской комиссіи по преподаванію математики, я убѣдился, что то, о чемъ мы только мечтали, во Франціи уже принято. Вотъ что говоритъ Guitton, Prof. au lycée Henri IV въ Парижѣ, въ своей статьѣ «Rapport sur l'algèbre» во II т. «Rapports de la sous-commisson française de la Commission Internationale de l'Enseign. Mathém.», посвященномъ среднему образованію: «Такъ какъ главная трудность въ обученіи алгебры заключается въ пріученіи къ буквенному счету, то чѣмъ раньше начинать, тѣмъ лучше. Въ 5-омъ, т.-е. нашемъ 2-мъ, изучаютъ дѣйствія надъ числами; изображая ихъ буквами, переводятъ на языкъ формулъ найденныя правила; дальнѣйшее обученіе покажетъ перманентность этихъ формулъ. Начинаютъ со свойствъ суммы: позднѣе скажутъ, что сложеніе есть операція коммутативная и ассоціативная. Потомъ являются правила сложенія, вычитанія или умноженія суммы; приложеніе представляетъ разложеніе квадрата $a+b$. Наконецъ, произведенія множителей и возвышеніе въ степень доставляютъ новыя формулы, которыя возвращаются въ теченіе всего хода занятій. Ученики уже въ состояніи разрѣшать уравненія первой степени съ цѣлыми коэффиціентами, лишь бы рѣшенія были цѣлыя, и не приходилось бы встрѣчаться съ невозможными вычитаніями. Позднѣе они будутъ рѣшать подобные вопросы механическими пріемами; но на первой стадіи обученія нужно подтверждать правило каждый разъ, какъ его примѣняешь. Когда ученикъ написалъ уравненія задачи, онъ далъ только осязательный образъ условій задачи. Онъ можетъ тотчасъ же естественными пріемами получить изъ нихъ рѣшеніе. Метода настолько проста, что для того, чтобы сдѣлать труднѣе нѣкоторые экзамены, на которыхъ фигурируютъ ариѳметическіе вопросы, допускаютъ только «ариѳметическія» рѣшенія, какъ-будто мы выходимъ изъ области ариѳметики, изображая число буквою. Когда нельзя употреблять буквъ, простыя задачи становятся часто настоящими головоломками и требуютъ отъ кандидатовъ продолжительной тренировки; ихъ время могло бы быть употреблено болѣе полезнымъ образомъ».

И принято это не гдѣ-нибудь, а именно во Франціи, гдѣ

преподаваніе математики стоитъ высоко, настолько высоко, что даже нѣмцы при всемъ ихъ, можно сказать, шовинизмѣ, тѣмъ не менѣе, говорятъ: «In der Mathematik sind die Franzosen uns überlegen». И я полагаю, что тѣ измѣненія, то взаимное проникновеніе и сліяніе, о которомъ говоритъ Guitton, вполнѣ осуществимы и сберегутъ массу времени и силъ. Надо раздѣлить ариѳметику на двѣ части: практическую ариѳметику и ариѳметику теоретическую, и въ младшихъ классахъ сохранить только первую. Алгебраическія обозначенія вводить, какъ можно, раньше,—все это положенія, возражать противъ которыхъ можно, но которыя представляются совершенно натуральными; на ряду съ этимъ, уже въ ариѳметику надо вводить простыя геометрическія понятія—интуитивную, наглядную геометрію, безъ которой вся метрическая система, все ученіе о мѣрахъ становятся совершенно безцѣнными. И это французами уже сдѣлано. Въ высшей степени интересными являются не только самыя программы и планы, и тѣ замѣчанія, которыя имъ посвящены въ обзорахъ A. Levy, Guitton и Rousseau, но и самыя руководства, составленныя примѣнительно къ этимъ планамъ.

Такова, напр., коллекція, издаваемая подъ общимъ именемъ: «Collection Bourlet» книгоиздательской фирмы Hachette, которой вышло уже 16 томиковъ. Примѣръ французской школы убѣждаетъ насъ, что при надлежащей группировкѣ матеріала можно достичь введенія началъ такъ называемой высшей математики безъ обремененія учащихся, если только ограничиться введеніемъ ея въ умѣренной дозѣ, полезной для всѣхъ, какова бы ни была ихъ спеціальность. Эта доза опредѣляется прежде всего тѣмъ, что нужно для другихъ предметовъ, которые въ средней школѣ уже преподаются, и куда высшая математика прокралась контрабандой («гони природу въ дверь, она влетитъ въ окно»):

a) Графики, графическое изображеніе хода температуры, давленія, работы паровой машины, пути падающей точки, записаннаго на вращающемся цилиндрѣ.

b) Коническія сѣченія (параболическія зеркала; движеніе кометъ, планетъ въ космографіи).

c) Начала ученія о производныхъ (скорость и ускореніе; касательная) и т. д. Передъ опредѣленіемъ площадей при помощи интеграла я останавливаюсь, хотя графическое опредѣленіе работы паровой машины, коэффиціента полезнаго дѣйствія и т. п. достаточно убѣдительно говорятъ за необходимость и этого понятія.

Если обратиться теперь къ этому пополненію съ точки зрѣнія запросовъ высшей школы, главнымъ образомъ технической, то, разумѣется, чѣмъ болѣе высшей математики даетъ средняя школа, тѣмъ для высшей лучше: для университета, для математическаго факультета, тѣмъ, чтобы получить болѣе сознательныхъ слушателей на математическомъ отдѣленіи и отбросить элементарныя части высшей математики; для естественнаго отдѣленія физико-математическаго факультета и для медицинскаго факультета и даже для юридическаго понятіе о функціи, производной, о графическомъ изображеніи, я бы сказалъ, прямо необходимо.

Абсолютно не нужно все это развѣ только для филологовъ; но ихъ такъ немного, что не бѣда, если и они получатъ новое интересное понятіе, которое иногда, можетъ-быть, пригодится и имъ. Еще болѣе, чѣмъ для математическаго отдѣленія университета, введеніе началъ высшей математики въ среднюю школу имѣетъ значеніе для высшей технической школы, гдѣ математика играетъ служебную роль: тамъ эта возможность облегчить первый курсъ особенно важна. И французы въ этомъ отношеніи довольно радикальны: послѣ пересмотра плановъ и усиленія началъ высшей математики въ средней школѣ въ Ecole des Beaux-Arts въ Парижѣ каѳедра математики была уничтожена, какъ ненужная болѣе, и соотвѣтственныя требованія перенесены въ программу вступительныхъ конкурсныхъ экзаменовъ. У насъ этого не придется дѣлать. Послѣ того, какъ введено будетъ болѣе полное преподаваніе началъ высшей математики въ средней школѣ, останется еще много работы для математики въ технической школѣ.

Достаточно указать на книгу А. Н. Крылова, «Лекціи о приближенныхъ вычисленіяхъ», чтобы убѣдиться въ справедливости этого. Придется обратить больше вниманія на диффе-

ренціальную геометрію, на вычисленіе безконечно-малыхъ различныхъ порядковъ, словомъ, дать въ системѣ то, что теперь каждый прикладной математикъ дѣлаетъ у себя и часто недостаточно строго и правильно. Систематизировать этотъ матеріалъ значило бы заполнить ту пропасть, которая теперь существуетъ въ высшихъ техническихъ учебныхъ заведеніяхъ, между курсомъ высшей математики и курсомъ практической механики и проч., и которая имѣетъ результатомъ заучиваніе первой только для экзамена, чтобы послѣ него основательно забываться.

Что касается французскаго Classe de Mathématiques Spéciales, который часто приводится у насъ для пущаго посрамленія нашей отсталости въ математическомъ отношеніи, то, конечно, это одно изъ рѣшеній вопроса о преподаваніи высшей математики въ средней школѣ, и притомъ на первый взглядъ самое простое. Но при ближайшемъ разсмотрѣніи возникаютъ нѣкоторыя сомнѣнія въ желательности именно такого рѣшенія вопроса.

Прежде всего это явленіе чисто-французское, связанное съ доминирующимъ значеніемъ, которое во Франціи занимаетъ Политехническая Школа: ежегодно тысяча аспирантовъ съѣзжается со всѣхъ концовъ Франціи держать конкурсные экзамены. Какъ общее правило, только не попавшіе въ Политехническую Школу идутъ въ университетъ, и широкую программу этой школы можетъ вынести только та отборная кучка, которая проходитъ благополучно черезъ всѣ испытанія. Къ этимъ-то строгимъ экзаменамъ и готовитъ Classe de Mathématiques Spéciales.

Учитель здѣсь имѣетъ право заявить ученику, что его способности недостаточны для подготовки, и что ему лучше уйти (не всѣ, конечно, этого слушаются). И изъ не выдержавшихъ экзаменъ многіе снова возвращаются въ тотъ же Classe de Mathématiques Spéciales, чтобы готовиться къ новому конкурсному экзамену. Требованія экзаменныхъ программъ мѣняются, и, напр., до послѣдней реформы особое развитіе имѣли алгебра и аналитическая геометрія. Показателемъ объема требованій можетъ служить трехтомный курсъ аналитической геометріи Pruvost; хорошій ученикъ Classe de Mathématiques Spé-

ciales, по словамъ C. Bourlet, зналъ его отъ доски до доски. Не это, конечно, намъ нужно и, во всякомъ случаѣ, не это одно. Если мы говоримъ о французской системѣ, то, главнымъ образомъ, имѣемъ въ виду распредѣленіе на секціи. Со времени реформы 1902 года французская средняя школа раздѣляется на два цикла—низшій 4 года и высшій—2 года съ третьимъ дополнительнымъ [1]).

Первый циклъ обнимаетъ классы 6-й, 5-й, 4-й и 3-й и раздѣляется на два отдѣленія: одно—съ латинскимъ и другое безъ латинскаго. Въ 1-омъ за 4 года 9 уроковъ математики, во второмъ—17.

Вотъ что говоритъ Grevy, характеризуя реформу 1902 г. (цитирую по статьѣ Ch. Bioche въ указанномъ уже «Отчетѣ»):

«Доминирующая идея реформы была та, чтобы отвести сколь возможно большую долю занятіямъ науками физико-математическими и новыми языками, чтобы ученикъ, выходящій изъ лицея, могъ понимать многообразныя промышленныя примѣненія, которыя ему встрѣтятся съ самаго начала его дѣятельности, и не остаться чуждымъ экономическаго движенія, значеніе котораго возрастаетъ съ каждымъ днемъ.

«Наиболѣе интересное нововведеніе реформы 1902 года—это созданіе въ первомъ (младшемъ) циклѣ отдѣленія безъ латинскаго языка [2]); циклъ этотъ составленъ былъ такъ, чтобы ученики, покидающіе лицей по окончаніи 3-го класса, были вооружены достаточнымъ научнымъ багажемъ, чтобы начать свою дѣятельность на поприщѣ торговли или промышленности, и чтобы остальные подготовились къ занятіямъ болѣе высокаго порядка.

«Одна изъ характеристическихъ чертъ плана занятій 1905 года есть ясное различіе, которое имъ устанавливается между характеромъ преподаванія въ первомъ циклѣ и во второмъ. До 1902 года геометрія преподавалась, начиная съ 4-го класса [соотвѣтствующаго русскому 3-му], если не совершенно въ духѣ евклидовыхъ «Элементовъ», то, по крайней мѣрѣ, способомъ

---

[1]) Болѣе подробныя свѣдѣнія объ организаціи учебныхъ заведеній см. напр., Vuibert, «Annuaire de la jeunesse».

[2]) «Enseignement Secondaire». 1904, № 14.

логическимъ, представляющимъ большія аналогіи съ ученіемъ Евклида; напротивъ, по учебному плану 1905 года «геометрія должна быть преподаваема—въ первомъ циклѣ—путемъ экспериментальнымъ,—во всякомъ случаѣ, по крайней мѣрѣ, тогда, когда дѣло идетъ о понятіяхъ прямой, плоскости, параллельныхъ и проч.; всякій новый элементъ долженъ быть сопровождаемъ его точнымъ построеніемъ съ помощью линейки и циркуля, а не проведеніемъ отъ руки, не пріучающимъ къ точности; геометрическое черченіе должно быть вспомогательнымъ средствомъ при преподаваніи геометріи». Словомъ, преподаваніе въ первомъ циклѣ должно быть сколь возможно конкретно; въ естественныхъ классахъ второго цикла начинаютъ снова проходить во 2-мъ планиметрію, въ 1-омъ—стереометрію уже логическимъ образомъ.

Циклъ высшій раздѣляется на четыре отдѣленія:

A. Латинскій—греческій.

B. Латинскій—новые языки.

C. Латинскій—науки естественныя (sciences).

D. Новые языки—науки естественныя (sciences).

Первые два математику изучаютъ въ значительно меньшемъ объемѣ; два другіе—въ значительно большемъ: въ первыхъ на математику отводится по два урока годовыхъ въ двухъ классахъ (2-омъ и 1-омъ—по французской терминологіи), въ C и D—въ тѣхъ же классахъ по 5. По окончаніи ихъ, A, B идутъ въ Classe de philosophie, гдѣ математикѣ отводится 1 часъ въ полугодіи обязательныхъ (космографія) и 2 часа факультативнаго курса; отдѣленія же C и D—въ Classe de Mathématiques, гдѣ математикѣ отводится 8 часовъ годовыхъ. При такомъ сокращеніи времени, отводимомъ на математику на секціяхъ A, B, все же удается, благодаря переработкѣ программъ, доходить до сообщенія ученикамъ понятій о производной и аналитической геометріи.

Здѣсь не мѣсто, конечно, распространяться подробно о программахъ. Не лишнее, можетъ-быть, лишь напомнить, что программы 1902 года были реакціей противъ увлеченій предшествовавшихъ программъ введеніемъ духа строгости и систе-

матичности, доходившей до устраненія геометрическихъ иллюстрацій понятія о производной.

Эти программы 1902 года были составлены выдающимися учеными, не имѣвшими, однако, опыта, преподаванія въ средней школѣ, и вызвали оживленную критику со стороны педагоговъ, и уже въ 1905 году былъ произведенъ общій пересмотръ программъ преподаванія математики. Въ 1909 году произведенъ былъ новый пересмотръ программъ словесныхъ отдѣленій (А и В) второго цикла.

Вотъ что по этому поводу говоритъ Ch. Bioche въ своей вступительной къ отчету статьѣ «Sur la place et l'importance des Mathématiques dans l'enseignement Secondaire en France».

«Программа математики классовъ 2-го и 1-го А и В содержитъ теперь понятія о графическомъ изображеніи функцій, съ приложеніями къ равномѣрно ускоренному движенію, и элементарныя свѣдѣнія по тригонометріи,—свѣдѣнія, достаточныя для того, чтобы, пользуясь таблицами натуральныхъ значеній тригонометрическихъ линій, употребленіе которыхъ становится очень обычнымъ, дать возможность ученикамъ рѣшать различныя простыя задачи, встрѣчающіяся на практикѣ. Время, посвященное математикѣ—2 часа въ недѣлю,—достаточно для того, чтобы можно было настаивать на численныхъ приложеніяхъ. Если теперь ученики выучиваютъ менѣе теоремъ, чѣмъ прежде, зато они пріобрѣтаютъ интересныя понятія и научаются ихъ примѣнять».

Нѣтъ надобности указывать, что доза высшей математики въ отдѣленіяхъ естественно-научныхъ (С и D) несравненно выше. Можно бы думать, что эти отдѣленія оказываются очень трудными для учениковъ и мало избираемыми. Оказывается наоборотъ,—они-то именно и привлекаютъ наибольшее количество учащихся. Вотъ цифры, которыя любезно сообщилъ мнѣ въ прошломъ году B. Niewenglowski, Inspecteur général de l'Enseignement Secondaire,—они даютъ процентное отношеніе учащихся во 2-омъ и въ 1-омъ классахъ 4-хъ отдѣленій за семь лѣтъ 1903—1909 (1903-й годъ нѣсколько неправиленъ, ибо реформа произведена въ 1902-мъ году).

Лицеи и колледжи.

		1903	1904	1905	1906	1907	1908	1909
2-й классъ.	A	10,83	10,03	9,21	8,40	8,18	7,76	7,76
	B	12,30	16,95	17,87	19,18	18,62	18,61	18,83
	C	24,95	24,89	24,13	23,05	22,98	22,85	22,56
	D	51,91	48,12	48,77	49,36	50,21	50,77	50,93
1-й классъ.	A	37,39	18,49	13,83	12,07	11,77	10,05	9,73
	B	14,29	16,73	20,26	21,54	22,82	23,19	22,07
	C	30,28	28,97	25,44	25,04	23,09	22,84	22,95
	D	18,13	35,80	40,43	41,33	42,31	43,91	45,24

Цифры эти достаточно характерны и говорятъ сами.

Мы видимъ, что почти три четверти всего числа учащихся въ первомъ циклѣ избираютъ именно тѣ отдѣленія, которыя наиболѣе насыщены математикой. И такъ какъ нѣтъ основаній предполагать, что французская нація характеризуется особою природною одаренностью къ математикѣ въ трехъ четвертяхъ своихъ, то мы должны будемъ признать, что болѣе обширный курсъ математики, проходимый на отдѣленіяхъ C и D, не является непреодолимымъ для большинства.

Но эти цифры чрезвычайно любопытны и въ другомъ еще отношеніи. Онѣ показываютъ, какъ падаетъ число изучающихъ древніе языки, и число отдающихся словеснымъ наукамъ (отд. A и B вмѣстѣ) даетъ все уменьшающуюся долю, приближающуюся къ 0,25. И секція C, которая, казалось, должна бы быть самою многолюдною (такъ мнѣ и сообщалъ сначала г. Нивенгловскій), привлекаетъ всего 22—23%, и число это, хотя и медленно, но непрерывно падаетъ. При важности латинскаго языка и римской культуры для Франціи не удивительно, что такое положеніе вещей начинаетъ даже тревожить просвѣщенныхъ людей Франціи, и это, можетъ-быть,—причина того, что за послѣднее время въ средѣ представителей науки и техники во Франціи раздаются голоса о значеніи классическаго образованія. Но это уже выходитъ изъ области прямой нашей темы.

И я позволю себѣ, чтобы не затягивать доклада, ограничиться сказаннымъ и выразить пожеланіе, чтобы и для насъ наступило время, когда математикѣ будетъ отведено подобающее ей мѣсто, и чтобы дѣло пересмотра плановъ происходило при совмѣстной работѣ представителей средней и высшей школы.

Историческій обзоръ развитія понятія о функціи.

Докладъ прив.-доц. С. Н. Бернштейна (Харьковъ).

Въ настоящее время можно считать общепризнаннымъ, что понятіе математической функціи относится къ числу основныхъ понятій человѣческаго мышленія. Уже давно многіе выдающіеся математики и педагоги настаиваютъ на необходимости введенія понятія о функціональной зависимости въ общеобразовательный курсъ средней школы; и, безъ сомнѣнія, однимъ изъ крупнѣйшихъ культурныхъ завоеваній нашихъ дней является осуществленіе этой идеи.

Въ виду того, что на долю многихъ изъ васъ выпадаетъ трудная и отвѣтственная, но въ высшей степени благодарная задача проведенія въ жизнь новой реформы, мнѣ казалось умѣстнымъ въ краткомъ и, по возможности, элементарномъ очеркѣ изложить вамъ исторію развитія понятія функціи отъ его возникновенія до нашихъ дней.

Понятіе функціи впервые, повидимому, вводится Декартомъ одновременно съ открытіемъ аналитической геометріи. Для него, какъ и для другихъ математиковъ XVII столѣтія, всякая функція представляется въ видѣ нѣкоторой линіи; ордината точки на данной линіи есть функція ея абсциссы. То же интуитивное геометрическое воззрѣніе на функцію мы находимъ и у основателей дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій, Лейбница и Ньютона. Объ этомъ обстоятельствѣ, свидѣтельствующемъ о чрезвычайной плодотворности геометрическаго представленія о функціи, слѣдуетъ всегда помнить тѣмъ, кто преподаетъ основанія анализа. Безъ сомнѣнія, современная математика, какъ мы увидимъ, ушла и должна

была уйти далеко отъ этого наивнаго воззрѣнія на функцію, замѣняющаго точное ея опредѣленіе; но начинающаго полезно лишь постепенно знакомить съ послѣдовательными усовершенствованіями этого понятія, прибѣгая вездѣ, гдѣ возможно, къ наглядной геометрической иллюстраціи отвлеченныхъ теоремъ.

Уже въ началѣ XVIII столѣтія мы встрѣчаемъ у Іоанна Бернулли первую попытку аналитическаго опредѣленія функціи, которому Эйлеръ придалъ слѣдующую нѣсколько болѣе точную форму: Functio quantitatis variabilis est expressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili, et numeris seu quantitatibus constantibus (функціей нѣкоторой перемѣнной величины называется аналитическое выраженіе, составленное при помощи этой перемѣнной величины и постоянныхъ количествъ). Однако, Эйлеръ, подобно большинству своихъ современниковъ, считалъ аналитическое опредѣленіе функціи далеко неравнозначнымъ, но гораздо болѣе узкимъ, чѣмъ первоначальное геометрическое опредѣленіе. Казалось недопустимымъ, что линія, начерченная совершенно произвольно, напримѣръ, ломанная линія, можетъ быть на всемъ своемъ протяженіи представлена однимъ и тѣмъ же аналитическимъ выраженіемъ.

Даніилъ Бернулли одинъ не раздѣлялъ общаго взгляда, и своимъ рѣшеніемъ физической задачи о колебаніяхъ струны, при помощи тригонометрическихъ рядовъ, онъ поставилъ на очередь этотъ основной для теоріи функцій вопросъ, утверждая, что всякая функція можетъ быть разложена въ тригонометрическій рядъ. Въ знаменитомъ спорѣ, возникшемъ по этому поводу, ближе къ истинѣ былъ Д. Бернулли, но доводы его и его противниковъ были одинаково неудовлетворительны въ математическомъ отношеніи.

Съ теченіемъ времени, въ особенности послѣ вмѣшательства въ споръ Лагранжа, а также благодаря соотвѣтствію слѣдствій изъ теоріи звука Д. Бернулли съ данными опыта, его воззрѣнія перестали казаться столь парадоксальными. Наконецъ, точка зрѣнія Д. Бернулли получила болѣе или менѣе общее признаніе въ началѣ XIX столѣтія, послѣ появленія знаменитаго сочиненія Фурье по теоріи теплоты, въ которомъ

онъ показалъ, что тригонометрическій рядъ въ различныхъ промежуткахъ можетъ представлять функціи, ничего общаго между собой не имѣющія, т.-е., выражаясь современнымъ языкомъ, можетъ представлять произвольныя функціи, имѣющія даже нѣсколько точекъ разрыва. Доказательства Фурье въ математическомъ отношеніи уже значительно болѣе удовлетворительны, чѣмъ разсужденія его предшественниковъ, но и они, въ большинствѣ случаевъ, не выдерживаютъ строгой математической критики; и мы знаемъ теперь, благодаря изслѣдованіямъ послѣднихъ десятилѣтій, и, въ особенности, послѣднихъ лѣтъ, что существуютъ непрерывныя функціи, которыя не могутъ быть представлены въ видѣ сходящагося ряда Фурье.

Какъ вы видите, въ разсужденіяхъ математиковъ XVIII столѣтія не было той обычной для насъ строгости, которая дѣлала бы ихъ выводы обязательными для всѣхъ и ограждала бы отъ роковыхъ ошибокъ.

Увлеченные мощностью новыхъ методовъ анализа, при помощи которыхъ одна за другой разрѣшались важнѣйшія задачи астрономіи и физики, великіе геометры XVIII столѣтія мало обращали вниманія на непрочность основаній, на которыхъ они строили свое грандіозное зданіе. А между тѣмъ противорѣчія и парадоксы накоплялись и грозили бы неминуемой катастрофой, если бы математики первой половины XIX столѣтія, главнымъ образомъ, Абель, Дирикле и Коши, не положили начала новому критическому періоду въ математикѣ,—періоду пересмотра принциповъ и строгаго обоснованія анализа.

Прежде всего необходимо было соотвѣтствующимъ образомъ ограничить объектъ изслѣдованій анализа, а именно: замѣнить прежнія расплывчатыя опредѣленія математической функціи точнымъ опредѣленіемъ, изъ котораго вполнѣ строго можно было вывести обычно приписываемыя ей свойства (существованіе производныхъ, интеграла и т. д.). Такое опредѣленіе, въ высшей степени плодотворное, было дано еще Лагранжемъ. Онъ называетъ *аналитическими* функціями функціи $S(x)$, которыя около всякаго значенія $x=a$ (за исключе-

ніемъ, можетъ-быть, отдѣльныхъ значеній a) разлагаются въ рядъ Тэйлора по возрастающимъ степенямъ $x-a$, и пытается доказать, что всѣ функціи вещественной перемѣнной суть аналитическія. Это утвержденіе безусловно ошибочно, и современный анализъ уже не можетъ быть заключенъ въ тѣ узкія рамки, которыя назначилъ ему Лагранжъ, но сто лѣтъ тому назадъ его воззрѣнія были приняты безъ существенныхъ возраженій, потому что всѣ встрѣчавшіяся до тѣхъ поръ функціи (алгебраическія, тригонометрическія, эллиптическія и т. д.) были всегда аналитическими; предположеніе же, что данная функція аналитическая, чрезвычайно упрощало разсужденія и вычисленія. Такимъ образомъ главнымъ аргументомъ въ пользу идей Лагранжа являлась не ихъ теоретическая обоснованность, а исключительно практическая цѣлесообразность. Какъ бы то ни было, одной изъ величайшихъ заслугъ Лагранжа останется навсегда то, что онъ обратилъ вниманіе математиковъ на самый общій признакъ, объединяющій всѣ извѣстныя дотолѣ функціи, и предугадалъ чрезвычайную важность аналитическихъ функцій и для будущаго.

Другой признакъ, общій всѣмъ аналитическимъ функціямъ, былъ замѣченъ Коши, который является истиннымъ основателемъ теоріи аналитическихъ функцій. Вы знаете, конечно, что, если степенной рядъ

$$S\ (x)=a_0+a_1\ x+a_2\ X^2+\ .\ .\ .+a_n\ X^n+\ .\ .\ .$$

сходится для вещественнаго значенія $X=R$, то онъ будетъ также сходящимся и для всѣхъ комплексныхъ значеній $X=u+iv$, модуль которыхъ менѣе R.

Такимъ образомъ аналитическія функціи Лагранжа, данныя лишь для вещественной перемѣнной, получаютъ вообще вполнѣ опредѣленныя значенія и для комплексныхъ значеній перемѣнной. Этимъ свойствомъ пользовались въ различныхъ частныхъ случаяхъ еще въ XVIII столѣтіи; достаточно вспомнить знаменитое тождество Эйлера, обнаруживающее періодичность показательной функціи e^x и ея тѣснѣйшую связь съ функціями Cos X и Sin X.

Коши разсматриваетъ непосредственно функцію комплекс-

ной перемѣнной X, произвольно данную внутри нѣкоторой области, и доказываетъ со всей математической строгостью, что всякая функція комплексной перемѣнной, имѣющая опредѣленную производную въ каждой точкѣ данной области, является аналитической въ смыслѣ Лагранжа.

Такимъ образомъ предложеніе, которое Лагранжъ тщетно пытался доказать для функцій вещественной перемѣнной, оказалось правильнымъ для функцій комплексной перемѣнной: достаточно знать, что функція (комплексной перемѣнной) имѣетъ первую производную, чтобы утверждать, что она имѣетъ производныя всѣхъ порядковъ, и что ея строка Тэйлора имѣетъ конечный радіусъ сходимости! Этотъ поистинѣ замѣчательный результатъ показывалъ, что комплексное число, обобщеніе вещественнаго числа, логически необходимое въ алгебрѣ, являлось также элементомъ, который цѣлесообразно было положить въ основу анализа. Дѣйствительно, на этомъ новомъ основаніи анализъ окрѣпъ и обогатился величайшими открытіями, сравнявшись съ алгеброй по безупречной строгости своихъ выводовъ. На первыхъ порахъ теорія аналитическихъ функцій и оставалась, по преимуществу, продолженіемъ алгебры, создавая и изощряя свои методы на изслѣдованіи алгебраическихъ функцій и интеграловъ и въ особенности на знаменитой задачѣ обращенія эллиптическаго интеграла. Эти изслѣдованія обнаружили значеніе такъ называемыхъ критическихъ или особенныхъ точекъ, въ которыхъ разсматриваемая функція не разлагается въ строку Тэйлора, или, какъ говорятъ, не голоморфна (напр., единственной критической точкой функціи $\frac{1}{X-1}$ является $X=1$); оказалось, что всякая аналитическая функція вполнѣ охарактеризована всѣми своими особенностями, такъ что разность между двумя функціями, имѣющими однѣ и тѣ же особенности, есть постоянная величина. Благодаря этому, зная всѣ особенности функціи, можно написать ея аналитическое выраженіе, позволяющее вычислить функцію для любого значенія перемѣнной.

Такимъ образомъ, теорія аналитическихъ функцій открыла въ высшей степени простой въ принципѣ и удивительно красивый методъ для классификаціи и вычисленія функцій.

Съ другой стороны, Коши показалъ, что область аналитическихъ функцій чрезвычайно обширна; онъ доказалъ посредствомъ разсужденій, которыя останутся классическими, что главный источникъ новыхъ функцій въ анализѣ, дифференціальныя уравненія, во всѣхъ извѣстныхъ въ то время случаяхъ всегда приводятъ къ аналитическимъ функціямъ, если только данныя функціи были аналитическими. Этимъ объясняется универсальное значеніе функцій комплексной перемѣнной; и ничего нѣтъ удивительнаго, что при обиліи и важности задачъ, выдвигаемыхъ теоріей аналитическихъ функцій, она почти безраздѣльно царила надъ анализомъ въ теченіе прошлаго столѣтія.

Но въ началѣ XIX столѣтія, почти одновременно съ аналитической функціей было введено также самое общее понятіе о функціи, которое вы встрѣтите теперь во всѣхъ учебникахъ: $y = f(x)$ называется (однозначной) функціей вещественной перемѣнной x въ нѣкоторомъ промежуткѣ AB, если каждому значенію x $(A \leq x \leq B)$ соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленное значеніе y. Это опредѣленіе, принадлежащее Дирикле, отличается чрезмѣрной общностью, и до настоящаго времени плодотворнымъ оказывалось только изученіе функцій, которымъ приписывались еще нѣкоторыя дополнительныя свойства. Одно изъ важнѣйшихъ ограниченій, которое всегда подразумѣвалось математиками XVII и XVIII столѣтій, и которое точно было формулировано Коши, есть непрерывность функціи, опредѣленіе которой всѣмъ вамъ достаточно хорошо извѣстно.

Лишь послѣ опредѣленія непрерывной функціи, даннаго Коши (а также послѣ установленія понятія сходимости безконечныхъ рядовъ), принципіальный вопросъ, раздѣлявшій, какъ вы помните, геометровъ XVIII столѣтія, могъ получить вполнѣ точную математическую форму, а именно: можетъ ли произвольная непрерывная функція быть выражена посредствомъ сходящагося ряда данныхъ функцій (напримѣръ, многочленовъ или тригонометрическихъ функцій?). Первый и чрезвычайно важный шагъ для рѣшенія того вопроса былъ сдѣланъ Дирикле; онъ доказалъ, что для того, чтобы произвольно

данная функція могла быть въ нѣкоторомъ промежуткѣ разложена въ сходящійся тригонометрическій рядъ, достаточно, чтобы она не имѣла въ данномъ промежуткѣ ни безконечнаго числа точекъ разрыва, ни безконечнаго числа максимумовъ и минимумовъ. Это чрезвычайно общее условіе носитъ названіе условія Дирикле.

Хотя, благодаря обманчивости геометрической интуиціи, на первый взглядъ кажется, что всякая непрерывная функція удовлетворяетъ условію Дирикле, но не трудно указать примѣръ непрерывной функціи ($y = x \operatorname{Sin} \frac{1}{x}$), которая имѣетъ безконечное множество максимумовъ и минимумовъ около точки $X = 0$.

Такимъ образомъ и глубокія изслѣдованія Дирикле не дали окончательнаго отвѣта на поставленный вопросъ. Этотъ отвѣтъ заставилъ себя ждать еще полстолѣтія, вѣроятно, потому, что середина XIX вѣка была эпохой величайшаго расцвѣта и исключительнаго увлеченія теоріей аналитическихъ функцій, и всѣ интересы геометровъ этого времени были сосредоточены вокругъ нея.

Какъ бы то ни было, въ 1885 г. отвѣтъ, который оказался утвердительнымъ, былъ найденъ Вейерштрассомъ: всякая непрерывная функція можетъ быть представлена въ видѣ сходящаго ряда многочленовъ. Такимъ образомъ непрерывная функція, взятая безъ всякихъ ограниченій, перестала быть чѣмъ-то недоступнымъ и получила такое же математическое выраженіе въ видѣ безконечнаго ряда, какъ аналитическая функція; при этомъ нерѣдко ряды, представляющіе функціи, не разлагаемыя въ строку Тэйлора и даже не имѣющія производныхъ ни въ одной точкѣ, чрезвычайно просты и отличаются большимъ сходствомъ съ рядами, выражающими хорошо извѣстныя аналитическія функціи. Этого замѣчанія было бы достаточно, чтобы понять, что чистый анализъ не долженъ болѣе ограничиваться изученіемъ функцій комплексной перемѣнной. Но есть на то еще и другое не менѣе существенное основаніе, лежащее въ самой теоріи аналитическихъ функцій. Вы помните, что всякая функція комплексной

перемѣнной вполнѣ опредѣляется совокупностью всѣхъ своихъ особенностей; для функцій, которыя были изучены первыми, особенностями служили отдѣльныя особенныя точки, аналогичныя тѣмъ, которыя встрѣчались у алгебраическихъ функцій. Однако, постепенно особенности разсматриваемыхъ функцій усложнялись; и одна изъ основныхъ задачъ теоріи эллиптическихъ интеграловъ не замедлила дать примѣръ функціи комплексной перемѣнной, для которой вся вещественная ось оказывается особой линіей: ни при какомъ вещественномъ значеніи эта функція не разлагается въ строку Тэйлора.

Дальнѣйшія изслѣдованія показали, что вообще функціи комплексной перемѣнной, имѣющія особыя линіи, не являются исключеніями; напротивъ, исключеніями слѣдуетъ считать функціи, не имѣющія ихъ. На особыхъ линіяхъ функція можетъ становиться безконечной или неопредѣленной, но можетъ также, въ частности, принимать и вполнѣ опредѣленныя значенія, выражаемыя произвольной, по существу, непрерывной функціей дуги на разсматриваемой линіи.

Такимъ образомъ, само логическое развитіе функціи комплексной перемѣнной неизбѣжно возвращаетъ анализъ на его первоначальную почву—къ функціи вещественной перемѣнной.

Къ началу двадцатаго столѣтія непосредственное изученіе функцій вещественной перемѣнной дѣлается снова одной изъ важнѣйшихъ очередныхъ задачъ. При этомъ не замедлилъ обнаружиться очень интересный фактъ: въ весьма многихъ случаяхъ предположеніе, что функція вещественной перемѣнной имѣетъ одну или нѣсколько производныхъ, влечетъ за собой существованіе всѣхъ производныхъ и сходимость ея разложенія въ строку Тэйлора, подобно тому, какъ Коши доказалъ это для комплексной перемѣнной; всѣ вещественныя функціи, представляющія собой не искусственный аггрегатъ, а органическое цѣлое, т.-е. обладающія свойствомъ, что онѣ вполнѣ опредѣлены во всей области своего существованія, если только онѣ даны на произвольно маломъ отрѣзкѣ, оказываются аналитическими, при нѣкоторыхъ чрезвычайно общихъ допущеніяхъ.

Благодаря этому видное мѣсто въ современномъ анализѣ занимаютъ вещественныя аналитическія функціи, методы изу-

ченія которыхъ должны значительно отличаться отъ методовъ общей теоріи аналитическихъ функцій, такъ какъ комплексныя особенности ихъ отличаются чрезвычайной сложностью и не представляютъ никакого практическаго интереса.

Недавно былъ предложенъ общій принципъ для классификаціи всѣхъ непрерывныхъ функцій вещественной перемѣнной. Изъ теоремы Вейерштрасса, о которой я говорилъ выше, мы знаемъ, что всякая непрерывная функція можетъ быть представлена съ какой угодно точностью, въ видѣ многочлена достаточно высокой степени. Предлагается различныя функціи характеризовать величиной погрѣшности, которая дѣлается, если замѣнять ихъ приближенными многочленами возрастающихъ степеней.

Въ частности, оказалось, что изъ всѣхъ функцій вещественной перемѣнной только аналитическія функціи характеризуются свойствомъ, что, при увеличеніи степени приближеннаго многочлена, ошибка убываетъ въ геометрической прогрессіи; для другихъ функцій ошибка уменьшается медленнѣе, тѣмъ медленнѣе, чѣмъ сложнѣе дифференціальная природа функціи. Такимъ образомъ, независимо отъ приложеній анализа и отъ введенія въ него комплекснаго числа, теорія аналитическихъ функцій должна войти въ него какъ первая глава теоріи функцій вещественной перемѣнной, — глава, посвященная функціямъ, наименѣе отличающимся отъ многочленовъ.

Разумѣется опытъ также мало можетъ намъ отвѣтить на вопросъ, аналитическая ли данная функція или нѣтъ, какъ и на вопросъ, раціонально ли то или другое число; это вопросы чисто-теоретическіе, и на нихъ можетъ отвѣтить только теорія.

Тѣмъ не менѣе, если при интерполированіи (т.-е. при замѣнѣ приближенными многочленами) эмпирической функціи мы быстро получаемъ большую точность, то вслѣдствіе указаннаго результатата слѣдуетъ ожидать, что, на основаніи теоретическихъ изслѣдованій, эту функцію цѣлесообразно будетъ считать аналитической; если, напротивъ, самое искусное интерполированіе будетъ давать плохое приближеніе, то мало

шансовъ, чтобы теорія разсматриваемой функціи была аналитически проста.

Я не буду долѣе задерживать вашего вниманія, но прежде, чѣмъ кончить, долженъ замѣтить, что непрерывныя функціи далеко не исчерпываютъ область анализа. И если въ настоящее время еще сравнительно рѣдки приложенія прерывныхъ функцій, то, во всякомъ случаѣ, изслѣдованія послѣднихъ десятилѣтій подготовили для нихъ прекрасную почву. Благодаря глубокой классификаціи различныхъ видовъ прерывности, мы знаемъ теперь, что функціи, которыя могутъ быть выражены аналитически (въ смыслѣ Эйлера), безконечно разнообразнѣе функцій, представляемыхъ геометрическими линіями; достаточно вспомнить функцію Дирикле, разлагаемую въ двойной рядъ многочленовъ, которая при всѣхъ ирраціональныхъ значеніяхъ перемѣнной равна нулю, а при раціональныхъ значеніяхъ равна единицѣ.

Въ этомъ краткомъ очеркѣ я имѣлъ въ виду только указать важнѣйшія направленія, въ которыхъ развивалось и развивается понятіе о функціи; при этомъ, чтобы не расширить своего доклада, я пропустилъ не мало существенныхъ фактовъ и много крупныхъ именъ. Но въ мою задачу не могла входить оцѣнка роли, сыгранной отдѣльными лицами; имена служили для меня, главнымъ образомъ, сокращенными обозначеніями извѣстныхъ направленій и эпохъ.

Обзоръ современной литературы по теоретической ариѳметикѣ и тригонометріи.

Докладъ составленъ Я. В. Іодынскимъ при участіи слушателя педагогическихъ курсовъ вѣдомства военно-учебныхъ заведеній по отдѣлу математики, Н. И. Зубковскаго (С.-Петербургъ).

Приступая къ обзору современной учебной литературы по ариѳметикѣ и тригонометріи, я считаю нужнымъ выяснить тѣ цѣли, которыя будутъ мною преслѣдоваться. Не вдаваясь въ критику учебниковъ, я намѣренъ указать между ними и тѣ изъ нихъ, на которыхъ отразились новыя теченія. Группируя учебники по тождественности взглядовъ составителей на основные вопросы, я вкратцѣ укажу особенности каждаго и въ своемъ изложеніи постараюсь придерживаться тѣхъ формулировокъ, къ которымъ прибѣгаютъ сами авторы. Естественно, что мною будутъ указаны далеко не всѣ авторы, а только болѣе распространенные.

Ариѳметика.

Обращаясь къ разсмотрѣнію учебниковъ по такъ называемой теоретической ариѳметикѣ, необходимо установить, какой матеріалъ въ нихъ обыкновенно излагается.

Согласно существующимъ программамъ и установившейся практикѣ, авторы этихъ учебниковъ излагаютъ слѣдующее: даютъ понятіе о числѣ, о системѣ счисленія; обосновываютъ дѣйствія надъ цѣлыми числами; знакомятъ съ элементарными свойствами чиселъ и съ ученіемъ о дробяхъ.

Одни авторы, прежде чѣмъ говорить о производствѣ какого-нибудь ариѳметическаго дѣйствія, приводятъ тѣ прин-

ципы или теоремы, на которыхъ это дѣйствіе основывается. У нихъ рельефно выступаютъ на первое мѣсто законы: перемѣстительный, сочетательный и распредѣлительный, т.-е. тѣ законы, которые сохраняютъ свою силу и при операціяхъ надъ дробными, отрицательными и ирраціональными числами.

Въ учебникахъ второй категоріи тѣ основные принципы или теоремы, на которыхъ покоятся операціи сложенія, вычитанія и т. д., не подчеркнуты такъ рѣзко, какъ въ учебникахъ первой группы; объ этихъ принципахъ говорится лишь попутно, при выясненіи порядка производства самого дѣйствія.

Къ первой категоріи относятся учебники:

Глаголева, Бѣльскаго, Стрекалова, Каспарьянца, Григорьева, Войнова и Тура.

А. Н. Глаголевъ, «Курсъ теоретической ариѳметики».

У Глаголева мы находимъ болѣе полнымъ отдѣлъ: «Элементарныя свойства чиселъ». Кромѣ обычнаго матеріала, въ этотъ отдѣлъ включено еще слѣдующее: 1) признаки дѣлимости на числа, оканчивающіяся единицею; 2) болѣе подробное указаніе на число дѣленій при отысканіи общаго наибольшаго дѣлителя (теорема Binet); 3) три доказательства теоремы: рядъ простыхъ чиселъ неограниченъ; 4) теорема Гаусса: произведеніе двухъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ, изъ которыхъ каждое меньше простого числа p, не дѣлится на p; 5) теорема о суммѣ и произведеніи всѣхъ дѣлителей числа; 6) совершенныя и дружественныя числа; 7) теорема о числѣ чиселъ небольшихъ даннаго и первыхъ съ нимъ (Эйлеръ); 8) высшая степень простого числа, входящаго въ произведеніе чиселъ отъ единицы до n; 9) число чиселъ въ рядѣ натуральныхъ чиселъ, не дѣлящихся на данныя простыя числа (Legendre); 10) о числѣ простыхъ чиселъ между единицею и n. Между главой объ общемъ наибольшемъ дѣлителѣ и главой о наименьшемъ кратномъ имѣется отдѣльная глава, посвященная числамъ относительно-простымъ.

Въ учебникѣ можно отмѣтить еще слѣдующее: формальное ученіе о дробяхъ; обобщенное ученіе о дробяхъ; свѣдѣнія о происхожденіи числа, названій чиселъ и системъ счисленія

(историческій очеркъ); много упражненій теоретическаго характера, среди нихъ много теоремъ (теорема Вильсона).

Н. В. Бѣльскій, «Курсъ теоретич. ариѳметики». Бѣльскій вначалѣ трактуетъ довольно обширно объ основныхъ понятіяхъ ариѳметики; основными онъ называетъ понятія о величинѣ, объ измѣреніи и о числѣ. Авторъ тутъ же даетъ опредѣленіе цѣлому, дробному и ирраціональному числу; послѣднее опредѣляется какъ результатъ измѣренія, который не выражается точно ни въ единицахъ, ни въ частяхъ единицы. Дается опредѣленіе понятія счета: «счетъ есть операція, основывающаяся на томъ, что мы въ состояніи удержать въ памяти послѣдовательность, въ которой являлись во времени одинъ за другимъ акты нашего сознанія» (Гельмгольцъ). Указана «аксіома счета»: «результатъ будетъ одинъ и тотъ-же, въ какомъ бы порядкѣ мы ни сосчитывали данную совокупность однородныхъ предметовъ (объектовъ счета)». Обращается вниманіе на однозначность суммы (сложеніе есть операція однозначная) и на то, что результатъ дѣйствія вычитанія можетъ быть полученъ изъ ряда натуральныхъ чиселъ тремя способами, вслѣдствіе чего и носитъ названія: «дополненія, разности и остатка» [1]). Производство дѣйствій надъ числами авторъ называетъ «техникой дѣйствій»; признаки дѣлимости выводитъ на основаніи общей теоремы $N = kp.\ B + a_1 + a_2 z_1 + a_3 z_2 + \ldots + a_n z_{n-1}$. Въ статьѣ «Элементарныя свойства чиселъ», кромѣ обычнаго матеріала, имѣются слѣдующія дополненія: 1) нѣкоторыя обобщенія къ теоріи признаковъ дѣлимости; 2) признаки дѣлимости на числа, оканчивающіяся единицей; 3) теорема Фермата; 4) сумма и произведеніе всѣхъ дѣлителей числа; 5) совершенныя числа и дружественныя числа. При изложеніи теоріи дробей авторъ, опредѣливъ дробь какъ совокуп-

[1]) Результатъ назыв. «дополненіемъ», когда имѣется переходъ отъ меньшаго числа къ большему путемъ прямого счета неизвѣстной совокупности единицъ; результатъ назыв. «разностью», если переходъ совершается отъ большаго числа къ меньшему путемъ обратнаго счета неизвѣстной совокупности единицъ, и «остаткомъ» въ случаѣ перехода отъ большаго числа къ неизвѣстному посредствомъ обратнаго счета извѣстной совокупности единицъ—а именно: меньшаго даннаго числа. Для поясненія всего этого въ учебникѣ приведены схемы.

ность равныхъ частей цѣлаго, вводитъ новую единицу счета $\frac{1}{m} = 1'$ и прежде, чѣмъ разсматривать дѣйствія надъ дробями, доказываетъ, что дробь есть частное; дѣйствіе надъ дробями обосновываетъ на томъ, что дробь есть частное; при разсмотрѣніи сложенія онъ пользуется также и новой единицей счета. Затѣмъ авторъ дѣлаетъ краткое замѣчаніе о томъ, что всѣ тѣ свойства, которыя установлены для дѣйствій надъ цѣлыми числами (т.-е. законы — перемѣстительный, сочетательный и распредѣлительный), легко могутъ быть распространены и на дѣйствія надъ дробями.

Въ учебникѣ имѣется историческій очеркъ происхожденія числа. Въ концѣ книги много задачъ и упражненій.

В. Стрекаловъ, «Теоретическая ариѳметика». Авторъ говоритъ, что подъ «счетомъ разумѣютъ послѣдовательное называніе натуральныхъ чиселъ по мѣрѣ образованія ихъ изъ единицы», и что «ариѳметическое дѣйствіе опредѣляется по цѣли, для которой оно предназначено, и состоитъ въ преобразованіи одного даннаго числа при помощи другого, согласно указанной цѣли». Числа, служащія для производства дѣйствій, называются элементами; то число, которое преобразовывается, назыв. преобразуемымъ, а другое — преобразующимъ; результатомъ называется число, которое получится изъ перваго при помощи второго. «Ариѳметическія дѣйствія обладаютъ различными свойствами; эти свойства представляютъ видоизмѣненія трехъ законовъ: перестановительнаго, собирательнаго и распредѣлительнаго». До разсмотрѣнія дѣйствій въ отдѣльности устанавливается понятіе объ обратныхъ дѣйствіяхъ: сложенію и умноженію соотвѣтствуютъ по два обратныхъ дѣйствія, но такъ какъ вышеназванныя прямыя дѣйствія перестановительны, т.-е. преобразуемый элементъ можетъ быть разсматриваемъ какъ преобразующій (и обратно), то каждому такому дѣйствію соотвѣтствуетъ лишь одно обратное. Авторъ подробно говоритъ о примѣняемости законовъ — перестановительнаго, собирательнаго и распредѣлительнаго — къ ариѳметическимъ дѣйствіямъ (указываетъ, напр., «что умноженіе распредѣлительно относительно сложенія и вычитанія по множимому и множителю, т.-е.

вполнѣ распредѣлительно относительно этихъ дѣйствій». Въ учебникѣ говорится о возвышеніи въ степень, объ извлеченіи корней и логариѳмированіи; дается понятіе объ обобщеніи дѣйствій. Дробь опредѣляется какъ частное; вводятся единицы различныхъ порядковъ (напр., $\frac{1}{в}$ — единица *в*-го порядка); законы перестановительный, собирательный и распредѣлительный распространяются на дѣйствія надъ дробными числами. Распространивъ правила нумераціи на дроби, авторъ дѣйствія надъ цѣлыми числами и десятичными дробями разсматриваетъ совмѣстно. Даны необходимыя свѣдѣнія изъ теоріи чиселъ.

В. Каспарьянцъ, «Учебникъ теоретическ. ариѳметики». Каспарьянцъ называетъ счетъ «первоначальнымъ ариѳметическимъ понятіемъ» (не имѣющимъ опредѣленія).

При разсмотрѣніи дѣйствій вычитанія и дѣленія указывается на то, что обратными дѣйствіями рѣшаются два различныхъ вопроса, но, благодаря перемѣстительному закону разрѣшенія обоихъ вопросовъ, выполняются однимъ дѣйствіемъ — или вычитаніемъ, или дѣленіемъ. При опредѣленіи цифръ частнаго авторъ прибѣгаетъ къ тому объясненію, которое примѣняется при извлеченіи корня квадратнаго изъ чиселъ. Въ статьѣ о дробяхъ, до разсмотрѣнія дѣйствій, доказывается, что дробь есть частное. Законы перемѣстительный и сочетательный распространяются на дѣйствія надъ дробями; распредѣлительный же законъ въ статьѣ о дробяхъ не упоминается, а при умноженіи цѣлыхъ чиселъ законъ этотъ приведенъ въ видѣ теоремы.

А. М. Григорьевъ, «Теоретическая ариѳметика». Въ учебникѣ говорится о свойствахъ натуральнаго ряда чиселъ: 1) рядъ начинается первымъ числомъ—единицей; 2) за каждымъ числомъ слѣдуетъ только одно число, и каждому числу ряда предшествуетъ только одно число; 3) ни одно число въ ряду не повторяется. Счетъ есть пріемъ, при помощи котораго узнаютъ, сколько единицъ въ данной группѣ; результатъ счета—число. Первое основное дѣйствіе—прямой счетъ; сложеніе есть тотъ же счетъ, но группами. Въ основѣ всѣхъ ариѳ-

метическихъ дѣйствій лежатъ слѣдующія аксіомы: 1) числовая величина не зависитъ отъ порядка счета; 2) къ равнымъ величинамъ можно прибавлять и убавлять поровну, и онѣ останутся равными; 3) равныя величины можно увеличивать и уменьшать въ одинаковое число разъ, и онѣ останутся равными; 4) 2-я и 3-я аксіомы относятся и до величинъ неравныхъ; 5) двѣ величины, порознь равныя третьей, равны между собою; 6) цѣлое больше своей части. При разсмотрѣніи вычитанія и дѣленія указывается, что, благодаря перемѣстительному свойству прямыхъ дѣйствій, два обратныхъ вопроса (для каждаго прямого) рѣшаются одной операціей. Говоря объ операціяхъ высшихъ ступеней, составитель упоминаетъ о возвышеніи въ сверхъ-степень и указываетъ, что прямыя и обратныя операціи третьей ступени не подчиняются законамъ «перестановочности и соединительности». Отсутствуетъ техника дѣйствій. Элементарныя свойства чиселъ изложены кратко. Для вывода признаковъ дѣлимости дана общая теорема

$$(N = kp\ B + a_1 + a_2 r_1 + a_3 r_2 + \ldots + a_n r_{n-1}).$$

А. Войновъ, «Очеркъ теоретической ариѳметики».

Войновъ говоритъ, что число — понятіе основное (не поддающееся опредѣленію), что въ математикѣ разсматриваются только тѣ величины, относительно которыхъ можно установить понятіе равенства и суммы. Авторъ приводитъ свойства натуральнаго ряда чиселъ: 1) ни одно число въ этомъ ряду не повторяется; 2) каждому числу предшествуетъ только одно и за каждымъ числомъ слѣдуетъ только одно число; а также указываетъ на то, что нуль для обобщенія понятія о числѣ разсматриваютъ какъ число, стоящее въ натуральномъ ряду непосредственно передъ единицей, и что, вслѣдствіе этого, нуль обладаетъ свойствами этого ряда. Говорится о томъ, что арабская система счисленія «аддиціональна»: въ этой системѣ число равно суммѣ значеній цифръ, которыми оно написано. Указывается, что два обратныхъ сложенію вопроса разрѣшаются однимъ дѣйствіемъ — вычитаніемъ, вслѣдствіе перемѣстительнаго закона, и два обратныхъ умноженію вопроса разрѣшаются однимъ дѣйствіемъ — дѣленіемъ, вслѣдствіе того же закона. Обращается вниманіе

на то, что опредѣленіе умноженія на дробь («взять эту дробь числа») не находится въ противорѣчіи съ опредѣленіемъ умноженія на цѣлое число.

К. Туръ, «Теоретическая ариѳметика».

Въ учебникѣ вначалѣ приводятся нѣкоторыя первичныя данныя или истины: 1) число не измѣняется отъ перемѣщенія составляющихъ его единицъ и отъ сочетанія ихъ на различныя части; 2) понятіе о равенствѣ и неравенствѣ чиселъ; 3) понятіе о цѣломъ и части (если всѣ части мы увеличимъ или уменьшимъ въ нѣсколько разъ, то цѣлое увеличится или уменьшится въ то же число разъ). Этого авторъ считаетъ достаточнымъ, чтобы возвести науку о числахъ (ариѳметику) въ степень умозрительной науки. Въ учебникѣ говорится, что основное ариѳметическое дѣйствіе есть счетъ; вводится понятіе о сочетательномъ и перемѣстительномъ свойствѣ «вычитаемыхъ и дѣлителей». Доказательства ведутся на числахъ, изображенныхъ цифрами.

Ко второй категоріи я отношу учебники: Билибина, Бертрана, Серре, Серре и Комберуса, Бореля и Будаевскаго. Устанавливая правила дѣйствій надъ цѣлыми числами, эти авторы, какъ было уже сказано, попутно приводятъ тѣ принципы, на которыхъ дѣйствія основываются.

Н. Билибинъ, «Теоретич. ариѳметика».

Понятіе суммы авторъ считаетъ первоначальнымъ и не опредѣляетъ. Приводится одинъ принципъ, на которомъ основывается теорія сложенія, и два принципа, на которыхъ основывается теорія вычитанія. Эти принципы не доказываются, а принципы, на которыхъ основывается умноженіе, доказываются. Говорится о теоремахъ, относящихся къ каждому дѣйствію. Признаки дѣлимости выводятся на основаніи общей теоремы:

$$N = kp.\ A + (a_0 +_1 a_1 r + a_2 r_2 + \ldots + a_{n-1} r_{n-1}).$$

Сейчасъ же послѣ опредѣленія понятія дроби доказывается теорема, что дробь есть частное. Приведено обобщеніе теоріи дробей.

Ж. Бертранъ, «Ариѳметика», перев. М. В. Пирожкова.

Опредѣленіе дѣйствій сложенія и умноженія авторъ основываетъ на понятіи о величинѣ и приводитъ принципы, на которыхъ основывается теорія дѣйствій. О теоремахъ, относящихся къ дѣйствіямъ, говорится по разсмотрѣніи каждаго изъ нихъ. Сейчасъ же послѣ опредѣленія дроби доказывается, что дробь есть частное. Дается обобщеніе теоріи дробей. Десятичныя дроби выясняются такимъ образомъ: ничто не заставляетъ насъ, говоритъ авторъ, слѣдуя закону нумераціи, остановиться на цифрѣ простыхъ единицъ: можно далѣе, вправо отъ послѣдней, продолжать ставить цифры, первая изъ которыхъ выразитъ десятыя части единицы, вторая—сотыя, третья—тысячныя и т. д. Числа, написанныя по этому способу, назыв. десятичными дробями. Въ учебникѣ приведена теорія квадратовъ и квадратныхъ корней, теорія несоизмѣримыхъ чиселъ (разсматриваемыхъ какъ предѣлы), теорія прогрессій и теорія логариѳмовъ. Въ концѣ каждой главы имѣются конспекты изложеннаго въ этой главѣ и упражненія.

А. Серре, «Курсъ ариѳметики», перев. А. Юденича.

Приводятся принципы, на которые опираются дѣйствія. Глава «Начальныя свойства чиселъ» содержитъ въ себѣ и теоремы, относящіяся къ дѣйствіямъ. Въ теоріи дробей доказательство того, что дробь есть частное, помѣщено послѣ умноженія. Приведены теоремы, относящіяся къ дѣйствіямъ: умноженію, дѣленію и возвышенію въ степень цѣлыхъ и дробныхъ чиселъ; всѣ эти теоремы сгруппированы въ одномъ мѣстѣ и являются слѣдствіемъ одной теоремы, вытекающей изъ перемѣстительнаго свойства, установленнаго для цѣлыхъ и дробныхъ чиселъ. Дана теорія квадратныхъ и кубичныхъ корней, теорія несоизмѣримыхъ чиселъ (послѣднія разсматриваются какъ предѣлы). Говорится о дѣйствіяхъ вообще (и притомъ не надъ числами, а надъ величинами). Теоремы, относящіяся къ дѣйствіямъ, распространяются на числа несоизмѣримыя. Далѣе говорится о корняхъ вообще, о прогрессіяхъ и логариѳмахъ. Въ концѣ книги много упражненій.

Серре и Комберусъ, «Курсъ ариѳметики», пер. Е. Гутора. Принципы, на которыхъ основываются дѣйствія, формулируются такъ же, какъ и у Серре. О теоремахъ, относящихся къ дѣйствіямъ, говорится послѣ того, какъ соотвѣтствующее дѣйствіе разсмотрѣно. Въ теоріи дробей доказательство того, что дробь есть частное, дано при разсмотрѣніи дѣленія дробей. Обобщается перемѣстительное свойство произведенія цѣлыхъ чиселъ на произведеніе дробей. Въ главѣ «Отношенія и пропорціи» дается понятіе о несоизмѣримыхъ числахъ, разсматриваемыхъ какъ предѣлы. Почти всѣ элементарныя свойства чиселъ выводятся на числахъ, изображенныхъ цифрами.

Э. Борель, «Ариѳметика». Первый циклъ. Авторъ говоритъ объ аксіомѣ числа и приводитъ теоремы, на которыхъ онъ основываетъ дѣйствія надъ цѣлыми числами; далѣе отмѣчаетъ, что возможность разсматривать всякое число въ видѣ суммы столькихъ чиселъ, сколько въ немъ содержится цифръ (при условіи, что каждое изъ этихъ чиселъ образуется изъ одной значащей цифры), не представляетъ необходимую часть системы нумераціи; она является лишь существеннымъ дополненіемъ; легко себѣ представить, что можно научиться считать до 100, понимать значеніе словъ «сорокъ шесть», «сорокъ», «шесть», знать соотвѣтствующіе письменные знаки и въ то же время не замѣчать, что $46 = 40 + 6$. Въ учебникѣ говорится о квадратныхъ корняхъ, объ ариѳметической и геометрической прогрессіяхъ. Въ теоріи дробей доказательство того, что дробь есть частное, приводится сразу послѣ опредѣленія дроби. Авторъ замѣчаетъ, что любую теорему относительно дробныхъ чиселъ можно свести къ соотвѣтствующей теоремѣ относительно цѣлыхъ чиселъ.

Имѣются упражненія какъ теоретическаго, такъ и практическаго характера. Доказательства ведутся на числахъ, изображенныхъ цифрами. Прежде, чѣмъ доказывать какую-нибудь теорему, Борель часто поясняетъ ее на задачахъ.

С. Будаевскій, «Ариѳметика». Будаевскій, при разсмотрѣніи каждаго дѣйствія, приводитъ тѣ положенія, на которыхъ

основываются эти дѣйствія. Въ отдѣлѣ «Элементарныя свойства чиселъ» послѣ дѣлимости излагается теорія простыхъ чиселъ. Для этого понадобилось довольно сложное доказательство теоремы: если произведеніе двухъ множителей дѣлится на третье число, первое съ однимъ изъ нихъ, то второе дѣлится на это третье. Законъ перемѣстительный распространяется только на умноженіе дробей. Дается понятіе о перемѣнныхъ числахъ.

Кромѣ перечисленныхъ учебниковъ по теоретической ариѳметикѣ на русскомъ языкѣ, я назову два труда по теоретической ариѳметикѣ на иностранныхъ языкахъ: «Theoretische Arithmetik» von dr. Otto Stolz und dr. J. A. Gmeiner — на нѣмецкомъ языкѣ и «Leçons d'arithmétique théorique et pratique» par Jules Tannery — на французскомъ. Въ первомъ сочиненіи положено въ основаніи ученія о числахъ теорія Пеано. Въ немъ излагается аналитическая и синтетическая теорія раціональныхъ чиселъ. Второе сочиненіе заключаетъ въ себѣ, какъ самъ авторъ говоритъ, свѣдѣнія, необходимыя какъ для начинающихъ изучать предметъ, такъ и для тѣхъ, которые желаютъ пріобрѣсти болѣе обширныя и глубокія познанія по ариѳметикѣ. Преподаватель можетъ найти въ этой книгѣ полное и обстоятельное изложеніе курса ариѳметики съ весьма полезными замѣчаніями, освѣщающими различныя стороны вопроса. Въ настоящее время вышелъ переводъ этой книги на русскій языкъ А. А. Котляревскаго подъ редакціей Д. Л. Волковскаго въ изд. т-ва И. Д. Сытина.

Тригонометрія.

Задавшись цѣлью по возможности избѣжать пространнаго перечисленія всѣхъ деталей каждаго учебника, я буду придерживаться въ своемъ изложеніи слѣдующаго плана. Выбравъ три распространенныхъ учебника, я отмѣтилъ въ нихъ тѣ вопросы, которые не всѣми авторами одинаково обстоятельно разбираются, а иногда и совсѣмъ опускаются. Эти три учебника въ совокупности даютъ приблизительно тѣ свѣдѣнія, которыя должны интересовать преподавателя. Въ остальныхъ

учебникахъ мною отмѣчаются только характерныя ихъ особенности. Сначала я укажу на тѣ курсы, которые содержатъ какъ свѣдѣнія изъ теоріи круговыхъ функцій (гоніометрію), такъ и собственно тригонометрію, т.-е. рѣшеніе треугольниковъ. Затѣмъ упомяну также о курсахъ, которые общей теоріи круговыхъ функцій не касаются, а даютъ болѣе или менѣе исчерпывающія свѣдѣнія о рѣшеніи плоскихъ прямолинейныхъ фигуръ. Послѣдніе составлены по принципу, выраженному въ программахъ М. Н. Пр. 1906 г. Начну свой перечень съ первой категоріи учебниковъ.

Къ первой группѣ мною отнесены учебники: Билибина II ч., Бореля, Бріо и Буке, Будаевскаго, Воинова, Де-Сеньи, Дмитріева, Злотчанскаго, Кильдюшевскаго, Малинина, Мрочека II ч., Пржевальскаго, Ребьера, Рыбкина, Серре, Симашко, Слетова, Тиме, Чемолосова, Шапошникова 2 кн., Шиффъ и Шмулевича.

Изъ перечисленныхъ выберу слѣдующіе три учебника: Рыбкина, Шапошникова и Серре, и остановлюсь на нихъ подольше съ цѣлью, которая мною была уже указана.

Н. Рыбкинъ, «Учебникъ прямолинейной тригонометріи и собраніе задачъ».

Во введеніи выясняется преимущество рѣшенія треугольниковъ вычисленіемъ, дается краткое понятіе о функціи, — о градусномъ и радіальномъ измѣреніи угловъ. По разсмотрѣніи тригонометрическихъ функцій угловъ первой четверти рѣшаются прямоугольные треугольники при помощи натуральныхъ тригонометрическихъ величинъ. Въ дальнѣйшемъ изложеніи говорится: о построеніи угла по данной его тригонометрической функціи; объ обобщеніи формулъ соотношеній между тригонометрическими функціями одного и того же угла; о періодичности тригонометрическихъ функцій (замѣчаніе); объ общности формулъ приведенія; о понятіи объ обратныхъ круговыхъ функціяхъ; о двойственности знаковъ въ тригонометрическихъ формулахъ; о тригонометрическихъ уравненіяхъ; о вычисленіи угловъ, близкихъ къ 0 или 90°; о степени точности при опредѣленіи угла по пятизначнымъ таблицамъ Пржевальскаго; о независимыхъ соотношеніяхъ между элементами тре-

угольника; о формулахъ Мольвейде; о выраженіи радіуса, описаннаго и вписаннаго круговъ; о выраженіи площади треугольника черезъ полупериметръ и тангенсы половинныхъ угловъ его; о контрольныхъ вычисленіяхъ; о геометрическомъ и аналитическомъ изслѣдованіи случая рѣшенія треугольника, когда даны двѣ стороны и уголъ противъ одной изъ нихъ; объ измѣреніи на мѣстности; о тріангуляціи.

Н. А. Шапошниковъ, «Курсъ прямолинейной тригонометріи и собраніе тригонометрическихъ задачъ.»

Болѣе подробныя свѣдѣнія, чѣмъ въ другихъ учебникахъ, о функціяхъ. Двоякое измѣреніе угловъ и дугъ. Условныя опредѣленія угла и дуги. Обобщенное понятіе объ углѣ и дугѣ. Понятіе о геометрическомъ и математическомъ синусѣ, косинусѣ и т. д. Различіе между тригонометрической линіей дуги и тригонометрической функціей угла.

Опредѣленіе аргумента по данной его функціи (построен.). О періодичности. Кратко о знакахъ въ формулахъ дѣленія. Объ общности формулъ приведенія. Формулы sin3a cos3a (указывается, что отысканіе этихъ выраженій приводитъ къ геометрической трисекціи угла). Приведеніе къ логариѳмическому виду выраженія корней квадратнаго уравненія. Подробно о вычисленіи тригонометрическихъ функцій (послѣдовательное вычисленіе по формуламъ Симпсона; ряды, выражающіе синусъ и косинусъ; степень точности при вычисленіи съ помощью таблицы Лаланда). Подробно объ обратныхъ круговыхъ функціяхъ (общія выраженія обратныхъ функцій; формулы, связывающія обратныя функціи, вычисленіе обратныхъ функцій; вычисленіе π). Особые случаи рѣшенія треугольниковъ. Кратко объ иcлѣдованіи формулъ рѣшенія треугольниковъ по тремъ сторонамъ. Аналитическое изслѣдованіе рѣшенія треугольника по двумъ сторонамъ и углу противъ одной изъ нихъ. Въ приложеніи: о рѣшеніи нѣкоторыхъ многоугольниковъ, объ измѣреніи на мѣстности, о тріангуляціи.

Изложеніе носитъ характеръ аналитическій.

А. Серре, «Тригонометрія», пер. Е. Гутора.

Нѣсколько словъ о функціяхъ. Обобщенное понятіе о дугѣ. О тригонометрическихъ линіяхъ дуги. О дугахъ, соотвѣтствующихъ дан-

ной тригонометрической линіи. Обобщеніе формулъ соотношеній между тригонометрическими линіями одной и той же дуги. Сумма косинусовъ и синусовъ ряда дугъ, составляющихъ ариѳметическую прогрессію. Выраженіе sin2a въ функціи sina и cosa. Опредѣленіе sin3a, cos3a и tg3a и вообще sinma, cosma и tgma. Выраженіе для $\sin\frac{a}{2}$ и $\cos\frac{a}{2}$ въ функціи sina и $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ въ функціи tga (изслѣдованіе знаковъ). Опредѣленіе $\sin\frac{a}{3}$, $\cos\frac{a}{3}$, $\operatorname{tg}\frac{a}{3}$, $\sin\frac{a}{m}$ $\cos\frac{a}{m}$ и $\operatorname{tg}\frac{a}{m}$. Опредѣленіе тригонометрическихъ функцій нѣкоторыхъ дугъ (напр., дугъ, выраженныхъ формулой $\frac{n\pi}{2^m}$ и др.). Замѣчаніе объ отношеніяхъ между различными тригонометрическими функціями (о возможности образованія произвольнаго числа тождественныхъ отношеній). Болѣе подробно—вычисленіе тригонометрическихъ линій (формулы Симпсона; объ ошибкахъ при вычисленіи тригонометрическихъ функцій). Рѣшеніе уравненій второй и третьей степени посредствомъ тригонометрическихъ таблицъ. Радіальное измѣреніе угловъ. О независимыхъ соотношеніяхъ между элементами треугольника. Нѣкоторые особенные случаи рѣшенія треугольниковъ. Рѣшеніе вписаннаго четыреугольника. Задачи практической тригонометріи (на мѣстности).

Изложено все подробно и обстоятельно.

Въ слѣдующихъ учебникахъ укажу на ихъ характерныя особенности.

Н. Билибинъ, «Курсъ тригонометріи». Часть вторая. «Основанія теоріи тригонометрическихъ (круговыхъ) функцій».

При изложеніи этого курса авторъ выясняетъ «на тригонометрическихъ фунціяхъ основныя понятія, относящіяся къ теоріи функцій, а именно: о функціи и ея непрерывности, о графическомъ изображеніи функцій, о нуляхъ и полюсахъ функцій, о возрастаніи и убываніи функцій, о производной, о maximum'ахъ и minimum'ахъ и объ обратимости функцій. Курсъ этотъ представляетъ изложеніе основаній теоріи тригонометрическихъ функцій».

Эмиль Борель, «Тригонометрія», переводъ О. В. С. подъ редакціей профессора харьковскаго университета Н. Н. Салтыкова.

Авторъ даетъ понятіе о прямоугольной координатной системѣ и пользуется ею при опредѣленіи тригонометрическихъ функцій. Затѣмъ къ особенностямъ этого учебника слѣдуетъ отнести: 1) десятичное дѣленіе окружности; 2) построеніе синусоиды (графическое изслѣдованіе измѣненія синуса); 3) теоремы о проекціяхъ; 4) доказательство теоремы сложенія на основаніи теоріи проекцій; 5) ознакомленіе съ производными круговыхъ функцій. Въ концѣ книги помѣщены таблицы логариѳмовъ и антилогариѳмовъ съ четырьмя десятичными знаками и таблицы логариѳмовъ круговыхъ функцій дугъ, выраженныхъ въ градахъ. Имѣются задачи изъ космографіи, физики и механики.

Бріо-Буке, «Тригонометрія. Прямолинейная тригонометрія», перев. Н. И. Мамонтова.

Приведена статья о проекціяхъ. Выводы соотношеній между круговыми функціями одной и той же дуги и доказательство теоремы сложенія основаны на теоріи проекцій.

С. Будаевскій, «Прямолинейная тригонометрія».

Дается понятіе о координатной системѣ. Имѣются графическое выраженіе тригонометрическихъ и «круговыхъ» обратныхъ функцій и основныя теоремы проекцій. Доказательство теоремы сложенія основано на теоріи проекцій.

А. Войновъ, «Прямолинейная тригонометрія».

Въ учебникѣ находимъ графическое изслѣдованіе измѣненія синуса (указывается, что этимъ путемъ можно обнаружить періодичность функцій) и нѣкоторыя дополнительныя предложенія о треугольникѣ.

Н. Ди-Сеньи, «Курсъ прямолинейной тригонометріи».

Подробно разработанъ вопросъ о двойственности знаковъ. Обращено вниманіе на методы рѣшенія тригонометрическихъ уравненій. Изслѣдуются формулы для рѣшенія треугольниковъ по тремъ сторонамъ. Учебникъ написанъ авторомъ для лицъ, поступающихъ въ спеціальныя заведенія, и сообразованъ съ программами этихъ заведеній.

А. Дмитріевъ, «Начальныя основанія прямолинейной тригонометріи». Авторъ говоритъ о синусѣ-верзусѣ и косинусѣ-верзусѣ, о хордовомъ масштабѣ, о масштабѣ тригонометрическихъ линій и о вычисленіи треугольниковъ по масштабамъ. Приведено изслѣдованіе формулъ рѣшенія треугольника по тремъ сторонамъ. Въ прибавленіи дано аналитическое изслѣдованіе сомнительныхъ случаевъ рѣшенія треугольниковъ, краткое понятіе о съемкѣ плановъ и нивелированіи. Имѣются краткія замѣтки изъ исторіи математики. Въ прибавленіи помѣщены сокращенныя таблицы обыкновенныхъ логариѳмовъ, составленныя по руководству Вега Ѳедоромъ Буссе.

П. Злотчанскій, «Прямолинейная тригонометрія». Говорится о происхожденіи названій тригонометрическихъ функцій. Имѣются аналитическій выводъ $\cos(a + b)$ (есть и геометрическій) и вычисленіе значеній тригонометрическихъ величинъ съ помощью приближенныхъ значеній π. Въ статьѣ объ уравненіяхъ указаны руководящія начала для ихъ рѣшеній.

Н. П. Кильдюшевскій, «Прямолинейная тригонометрія». Учебникъ приспособленъ къ прохожденію курса, согласно новымъ программамъ реальныхъ училищъ (указаны параграфы, которые проходятся въ VI кл., и параграфы въ VII кл.). Имѣются замѣчанія о механическомъ и геометрическомъ углахъ, графики тригонометрическихъ функцій, обобщеніе теоремы сложенія геометрическое и аналитическое и примѣненіе таблицъ Деламбра для вычисленія угловъ, близкихъ къ 0 и 90°.

А. Малининъ, «Тригонометрія». Подробно излагается статья о вычисленіи тригонометрическихъ величинъ и составленіи логариѳмическихъ таблицъ. Доказательство теоремы сложенія основано на теоремѣ Птоломея.

В. Мрочекъ, «Прямолинейная тригонометрія и Дается понятіе о синусѣ-верзусѣ и косинусѣ - верзусѣ. Имѣются мнемоническія правила для запоминанія формулъ приведенія,

основанія теоріи геометрическихъ функцій». Вторая часть.

графики синуса, тангенса и секанса, формулы Деламбра, а также дается примѣненіе его таблицъ къ рѣшенію различныхъ вопросовъ. Подробно изложены статьи: 1) объ обратныхъ круговыхъ функціяхъ (графики, непрерывность, многозначность, дѣйствія надъ обратными круговыми функціями) и 2) о тригонометрическихъ уравненіяхъ (методы рѣшеній). Приведены задачи Паппуса, Паскаля, Патенота и др. (рѣшенія и изслѣдованія).

Е. Пржевальскій, «Прямолинейная тригонометрія и собраніе тригонометрическихъ задачъ».

Тригонометрическія величины опредѣляются какъ отношенія перпендикуляра къ наклонной, перпендикуляра къ проекціи, проекціи къ наклонной и обратно. Указывается, что формулы сложенія могутъ быть выведены геометрически для всѣхъ угловъ, и приводится примѣръ. Затѣмъ въ учебникѣ находимъ: 1) таблицы хордъ и тангенсовъ; 2) введеніе тригонометрическихъ величинъ въ мнимыя выраженія; 3) формулу Моавра; 4) рѣшеніе двучленныхъ уравненій вида $x^m=a$, гдѣ a—дѣйств. или мнимое, а m—цѣлое и положительное число; 5) суммированіе нѣкоторыхъ тригонометрическихъ рядовъ; 6) формулы Деламбра; 7) доказательство теоремы, что разность логариѳмовъ тригонометрическихъ функцій приблизительно пропорціональна разностямъ соотвѣтствующихъ имъ угловъ. Подробно объ инструментахъ для измѣренія на мѣстности. Много задачъ.

А. Ребьеръ, «Курсъ элементарной тригонометріи и собраніе примѣровъ и упражненій», перев. Н. де-Жоржъ.

Графики синуса и косинуса. Подробное изслѣдованіе рѣшеній треугольниковъ. Тригонометрическій способъ выраженія мнимыхъ величинъ. Теорема проекціи. Глава, посвященная разнымъ задачамъ. Задача Патенота и др.

Ѳ. Симашко, «Тригонометрія».

Подробно излагается статья о вычисленіи тригонометрическихъ величинъ, о предѣлахъ погрѣшности при вычисленіи угловъ по семизначнымъ таблицамъ Вега, редактированнымъ Бремикеромъ.

Говорится о предѣлѣ погрѣшности при рѣшеніи треугольниковъ.

Н. П. Слетовъ, «Прямолинейная тригонометрія». Матеріалъ расположенъ въ учебникѣ такъ, что книга можетъ служить руководствомъ при прохожденіи тригонометріи въ реальныхъ училищахъ по программамъ 1906 г. Разбитъ этотъ матеріалъ на двѣ части, въ первой части—собственно тригонометрія, а во второй—гоніометрія. Методъ изложенія индуктивный. Приведены формулы Деламбра для вычисленія логариѳмовъ тригонометрическихъ величинъ малыхъ угловъ. Имѣются графики синуса, косинуса и тангенса.

Г. Тиме, «Плоская тригонометрія». Авторъ даетъ свѣдѣнія о логариѳмахъ Гаусса, историческій очеркъ плоской тригонометріи и пользуется при вычисленіяхъ таблицами логариѳмовъ Лаланда.

С. Чемолосовъ, «Прямолинейная тригонометрія». Тригонометрическія величины опредѣляются, какъ отношенія сторонъ прямоугольнаго треугольника. Теорема сложенія доказывается для угловъ, сумма которыхъ меньше двухъ прямыхъ; полученныя формулы обобщаются для частнаго случая $180 < a < 270$; $270 < a < 360$, и указывается, что подобнымъ же образомъ можно доказать справедливость формулъ для угловъ a и b всякой величины. Въ дополненіи посвящается отдѣльная глава вычисленію поверхностей и объемовъ тѣлъ вращенія при помощи теоремы Гульдена.

Н. А. Шапошниковъ, «Новый (алгебраическій) курсъ прямолинейной тригонометріи». Курсъ построенъ на новыхъ началахъ. Приведены основанія плоскостнаго исчисленія (секторъ, понятіе о комплексахъ), и на этихъ основаніяхъ построена теорія тригонометрическихъ функцій. Подробно излагается статья о рядахъ.

Вѣра Шиффъ, «Прямолинейная тригонометрія». Вначалѣ авторъ даетъ понятіе о проекціяхъ и координатахъ, а затѣмъ пользуется этимъ при опредѣленіяхъ и доказательствахъ теоремъ. Курсъ строится такъ, что синусъ и

косинусъ опредѣляются изъ геометрическихъ соображеній, а дальнѣйшія положенія устанавливаются какъ функціи синуса и косинуса. Много разнообразныхъ интересныхъ задачъ и упражненій.

П. К. Шмулевичъ, «Курсъ прямолинейной тригонометріи (энциклопедія тригонометріи)».

Не останавливаясь на характерныхъ особенностяхъ курса, слѣдуетъ, однако, указать на обстоятельную разработку всѣхъ теоретическихъ и практическихъ вопросовъ, которые могутъ быть изложены элементарно. Обращено большое вниманіе на методы рѣшенія задачъ.

Ко второй группѣ учебниковъ по тригонометріи отнесены мною тѣ изъ нихъ, въ которыхъ заключается матеріалъ курса VI кл. реальныхъ училищъ по новымъ программамъ 1906 г., а именно: даются самыя необходимыя свѣдѣнія о тригонометрическихъ функціяхъ остраго и тупого угла и затѣмъ разбирается рѣшеніе плоскихъ прямолинейныхъ фигуръ. При рѣшеніи треугольниковъ авторы пользуются или натуральными тригонометрическими величинами угловъ, или логариѳмами этихъ величинъ. Нѣкоторые составители учебниковъ излагаютъ свой курсъ болѣе подробно, а другіе ограничиваются разсмотрѣніемъ основныхъ случаевъ рѣшенія треугольниковъ.

Курсъ прямолинейной тригонометріи *В. Шидловскаго* изложенъ кратко; авторъ пользуется натуральными величинами тригонометрическихъ величинъ. Въ курсѣ тригонометріи *А. Жилинскаго* мы находимъ болѣе подробное изложеніе, а также задачи изъ стереометріи; примѣняются логариѳмическія таблицы при вычисленіяхъ. Въ учебникѣ *В. Мрочека* «Прямолинейная тригонометрія и основанія теоріи гоніометрическихъ функцій», I ч., затронуто больше вопросовъ, нежели въ предыдущихъ. Учебникъ знакомитъ съ разнообразными случаями, которые могутъ встрѣтиться при рѣшеніи треугольниковъ. Обращено вниманіе на систематизацію особенныхъ случаевъ рѣшенія треугольниковъ. Данъ историческій очеркъ развитія тригонометріи. Имѣются примѣры и задачи для упражненій. Примѣняются логариѳмическія таблицы.

Книга первая курса тригонометріи *Егунова* и *Яновича*,

составленная В. А. Егуновымъ, относится къ категоріи перечисляемыхъ. Вычисленія ведутся съ помощью логариѳмическихъ таблицъ. Въ концѣ книги имѣются таблицы натуральныхъ тригонометрическихъ величинъ. Дано свыше двухсотъ задачъ для самостоятельныхъ упражненій.

Часть 1-ая «Тригонометріи» *Н. Билибина* пріурочена къ той же основной цѣли. Этотъ учебникъ можетъ быть признанъ интересной и полезной книгой для преподавателя,—на столько тамъ широко и глубоко разобраны всѣ вопросы. Къ этой же категоріи относится учебникъ прямолинейной тригонометріи проф. *Глазенапа*. Въ книгѣ проф. Глазенапа обращено вниманіе на провѣрку вычисленій и на мало употребительныя таблицы Гаусса; задачи, помѣщенныя въ этомъ курсѣ, подобраны изъ области механики, физики, астрономіи, геодезіи и геометріи. Упомяну еще объ учебникѣ элементарной геометріи *Д. Ройтмана*, въ которомъ посвящается отдѣльная глава началамъ тригонометріи.

Обзоръ учебниковъ по аналитической геометріи, составленныхъ для реальныхъ училищъ.

Докладъ В. І. Шиффъ (Петербургъ).

Разсмотрѣнные мною учебники можно раздѣлить на двѣ группы: 1) учебники, составленные согласно программѣ, выработанной въ 1906 году М. Н. Пр.

Сюда относятся учебники: *А. Воинова*, «Основанія аналитической геометріи». 1906 г., стр. 78; *К. Н. Рашевскаго*, «Основанія аналитической геометріи» 1911 годъ, стр. 138; *Д. Горячева*, «Основанія аналитической геометріи на плоскости». 1908 г., стр. 86.

Содержаніе этихъ учебниковъ слѣдующее: Понятіе о прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатахъ. Понятіе о полярныхъ и биполярныхъ координатахъ. Уравненія прямой. Основныя задачи на прямую. Уравненія круга и кривыхъ 2-го порядка. Касательныя къ кривымъ 2-го порядка. Діаметры кривыхъ 2-го порядка.

Во всѣхъ вышепоименованныхъ учебникахъ изложеніе страдаетъ нѣкоторой неполнотой, такъ, напр., у г-на Воинова въ вопросѣ объ опредѣленіи координатъ точки пересѣченія двухъ прямыхъ совсѣмъ не изслѣдованы полученныя рѣшенія, и даже объ асимптотахъ гиперболы ничего не сказано.

Примѣры помѣщены преимущественно числовые и въ очень небольшомъ числѣ.

Уравненія кривыхъ 2-го порядка во всѣхъ этихъ учебникахъ получаются пересѣченіемъ конуса плоскостью, не проходящей черезъ вершину конуса и, согласно программѣ, ничего не говорится объ уравненіяхъ кривыхъ 2-го порядка въ общемъ видѣ. Вслѣдствіе этого не выясняется основная идея анали-

тической геометріи. Вообще, если введеніе въ среднюю школу аналитической геометріи имѣетъ цѣлью развитіе у учащихся функціональнаго мышленія и усвоеніе главной идеи, положенной въ основу метода аналитической геометріи—именно, какъ изъ соотношеній числовыхъ получить геометрическія свойства фигуры и обратно, какъ выразить геометрическія свойства фигуры посредствомъ числовыхъ соотношеній, т.-е. уравненіемъ, то, конечно, этой цѣли большинство изъ вышепоименованныхъ учебниковъ служить не можетъ.

Ко второй группѣ я отношу учебники:

М. П. Никонова, «Элементарный курсъ аналитической геометріи на плоскости». 1911 г., стр. 117.

Далѣе, гораздо подробнѣе составленные учебники:

А. Фролова, «Приложеніе алгебры къ геометріи и начала аналитич. геометріи на плоскости». Первая часть. «Приложеніе алгебры къ геометріи». 2-я часть. «Аналитич. геометрія на плоскости». По программѣ кадетскихъ корпусовъ. Изданіе десятое 1911 г., стр. 196.

К. Б. Пеніонжкевича, «Основанія аналитич. геометріи». 1911 г., стр. 186.

В. П. Свѣнцицкаго, «Краткій курсъ аналитической геометріи на плоскости». 1910 г., стр. 299.

Въ учебникахъ Фролова, Пеніонжкевича и Свѣнцицкаго входятъ какъ изслѣдованіе геометрическихъ мѣстъ по ихъ уравненіямъ, такъ и изслѣдованіе общаго уравненія 2-ой степени съ двумя перемѣнными.

Кромѣ численныхъ примѣровъ, есть и задачи.

Полнѣе всѣхъ вышепоименованныхъ учебниковъ—учебникъ г-на *Пржевальскаго,* который отличается еще тѣмъ, что, кромѣ очень большого числа примѣровъ и задачъ, содержитъ еще нѣкоторыя свѣдѣнія изъ аналитической геометріи въ пространствѣ.

Позволю себѣ теперь указать тѣ мѣста, которыя, по моему мнѣнію, подлежатъ исправленію, именно: у г-на Никонова, стр. 20.

«Опредѣленіе функціи». «Алгебраическое выраженіе $ax+b$ называется двучленомъ (биномомъ) первой степени, въ кото-

ромъ a и b—постоянныя величины, принимаемыя обыкновенно за извѣстныя; величина x—неизвѣстная, опредѣляемая при помощи a и b, есть величина въ то же время перемѣнная».

Далѣе, на стр. 22:

«При обозначенiи зависимости двухъ величинъ между собой въ видѣ: $y=S(x)$, $Z=G(y)$, $v=F(u)$ и т. д. можетъ случиться, что намъ будетъ извѣстенъ родъ этой зависимости, но неизвѣстенъ законъ, или правило изображенiя зависимости между этими перемѣнными при помощи уравненiя. Въ такомъ случаѣ функцiя называется «неявной», въ отличiе отъ «явной», когда дана опредѣленная зависимость между перемѣнными величинами.

Стр. 39. Прямая образуетъ съ осью x-овъ уголъ α; всякая точка прямой выходитъ изъ O подъ угломъ α.

У г-на Рашевскаго.

Стр. 17. «Два совмѣстныхъ уравненiя:

$$ax+by+c=0$$
$$a_1x+b_1y+c_1=0$$

выражаютъ на плоскости точку».

Не сдѣлано никакой оговорки относительно выраженiя ab_1-a_1b, а вѣдь, какъ извѣстно, въ случаѣ $ab_1-a_1b=0$, при $cb_1-c_1b=0$, получается не одна, а безчисленное множество точекъ.

Стр. 26. Уравненiе всякой прямой можетъ быть представлено въ такомъ видѣ: $y=kx+m$.

А если прямая параллельна оси y-овъ?

Стр. 27. Не оговорено, что уравненiе

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ не можетъ выражать прямую, проходящую черезъ начало координатъ.

У г-на Пенiонжкевича. Стр. 18.

«Пустъ намъ дано ур. $F(x,y)=0$ съ двумя перемѣнными x и y, гдѣ F есть знакъ неявной непрерывной функцiи.

Стр. 32. «При $m=\infty$ уравненiе прямой: $y=mx+b$, написанное предварительно въ видѣ:

$\frac{y}{m} = x + \frac{b}{m}$ обращается въ уравненіе $x = 0$ при b конечномъ, которое и выражаетъ тогда ось ординатъ, при $\frac{b}{m}$ конечномъ уравненіи выражаетъ прямую, параллельную оси ординатъ».

Ничего не объяснено относительно $\frac{y}{m}$ при $m = \infty$.

У г-на Фролова. Изданіе десятое.

Стр. 24. § 19. «Предметъ аналитической геометріи состоитъ въ изслѣдованіи геометрическихъ мѣстъ, выраженныхъ уравненіями».

Опредѣленіе, конечно, не полное, ибо аналитическая геометрія занимается не только изслѣдованіемъ геометрическихъ мѣстъ, выраженныхъ уравненіями, но также и составленіемъ уравненія, исходя изъ геометрическихъ свойствъ точки, принадлежащей геометрическому мѣсту.

Стр. 28. При изслѣдованіи ур.: $y = ax + b$ говорится слѣдующее: «При $a = \infty$ будетъ и $tg\angle = \infty$, уголъ α сдѣлается прямымъ, а линія AB совпадаетъ съ осью y-овъ. Въ этотъ моментъ уравненіе прямой, $y = ax + b$, должно быть одинаково съ ур. оси y-овъ, т.-е. оно должно принять видъ $x = 0$. И точно, если предварительно раздѣлены всѣ его члены на a, то выйдетъ $\frac{y}{a} = x + \frac{b}{a}$; положивъ теперь $a = \infty$, получимъ $0 = x$». Въ этомъ разсужденіи, очевидно, авторъ считаетъ y постояннымъ: при перемѣнномъ же y требуется объясненіе, почему $\frac{y}{a}$ при $a = \infty$ будетъ равно нулю, вѣдь y также можетъ стремиться къ безконечности. Авторъ ничего не говоритъ объ ур. $X =$ пост., такъ что у него нѣтъ ур. прямой параллельной оси y.

Стр. 36. «Приведите уравненіе $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ къ общему виду, полагая сперва $p = 0$, потомъ $q = 0$.

Но вѣдь при $p = 0$, или $q = 0$ совсѣмъ нельзя писать ур. прямой подъ видомъ $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.

Стр. 73. «Отношеніе перемѣнныхъ величинъ всегда равно отношенію предѣловъ, къ которымъ онѣ стремятся».

Стр. 89. «По мѣрѣ удаленія точекъ кривой отъ ея вершинъ, дробь $\frac{a^2}{x^2}$ стремится къ нулю, радикалъ $\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$ стремится къ единицѣ, а ординаты гиперболы стремятся къ равенству съ ординатами прямыхъ $У = \pm\frac{b}{a}x$; тѣ и другія становятся, дѣйствительно, равными только при $x = \pm\infty$».

Тутъ совсѣмъ непонятно, какъ можно утверждать, что

$$\pm\left(\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}\right) = \pm\frac{b}{a}x.$$

$$x = \pm\infty.$$

Я позволила себѣ указать только на наиболѣе грубыя ошибки въ этомъ учебникѣ, которыя тѣмъ болѣе непріятны, что онѣ встрѣчаются въ 10-омъ изданіи этого учебника.

Составленіе подходящаго учебника аналитической геометріи для средне-учебнаго заведенія такъ трудно, что весьма понятны нѣкоторые изъ встрѣчающихся недочетовъ.

Мнѣ пришлось сначала просмотрѣть учебникъ по аналитич. геометріи г-на Рашевскаго, изданный въ 1908 году, и когда я ознакомилась съ новымъ изданіемъ 1911 года этого учебника, то увидѣла между этими двумя изданіями громадную разницу—всѣ крупные недочеты были исправлены. Во всѣхъ вышепоименованныхъ учебникахъ по аналитической геометріи есть много хорошаго, въ особенности въ учебникѣ г-на Рашевскаго, изданномъ въ 1911 году.

Въ заключеніе моего доклада позволю себѣ указать, что выводъ ур. кривыхъ 2-го порядка, какъ коническихъ сѣченій, представляется мнѣ крайне сложнымъ для учащихся и притомъ, въ просмотрѣнныхъ мною учебникахъ, страдаетъ неполнотою, именно: показывается, что при пересѣченіи конуса плоскостью, не проходящей черезъ вершину конуса, получается одна изъ кривыхъ 2-го порядка, но ничего не сказано, какъ получить, пересѣкая конусъ плоскостью, данную кривую 2-го порядка, вслѣдствіе чего у учащихся можетъ появиться со-

вершенно невѣрная мысль, что если дана гипербола, то при пересѣченіи плоскостью любого кругового конуса можно получить данную гиперболу, а это, какъ извѣстно, невѣрно, ибо тутъ должно быть выполнено условіе, что уголъ при вершинѣ конуса долженъ быть не менѣе угла между асимптотами гиперболы.

Далѣе думается мнѣ, что желательно говорить о полярныхъ координатахъ не въ концѣ курса, а сейчасъ же послѣ опредѣленія прямолинейныхъ и больше ихъ примѣнять.

Выводъ формулы, выражающей разстояніе между двумя точками на плоскости въ полярныхъ координатахъ, очень простъ и вполнѣ общъ, какъ-бы ни были расположены обѣ точки, чего нельзя сказать, когда при выводѣ этой формулы въ Декартовыхъ координатахъ примѣняютъ теорему Пиѳагора. Переходъ же отъ полярной системы координатъ къ прямолинейной прямоугольной—крайне простъ. Вообще же я нахожу желательнымъ главное вниманіе сосредоточивать на выводахъ геометрическихъ мѣстъ и на изученіи, на сколько это возможно безъ дифференціальнаго исчисленія, вида геометрическаго мѣста по его уравненію. Очень хорошо было бы ознакомить учащихся съ циссоидой и конхоидой и показать, какъ, пользуясь этими кривыми, рѣшаются задачи объ удвоеніи куба и трисекціи угла.

Очень желательно при изложеніи аналитической геометріи пользоваться проекціей, ибо это значительно обобщаетъ выводы.

Весьма также желательно, имѣя въ виду выводъ ур. геометрическихъ мѣстъ, ознакомить учащихся и съ прямолинейными косоугольными координатами и указать имъ, что для каждаго случая надо умѣть выбрать наиболѣе подходящую систему координатъ, а также обратить ихъ вниманіе на то, что одно и то же ур., напр., $x+y=a$, выражаетъ въ Декартовыхъ координатахъ прямую линію, въ биполярныхъ же—эллипсъ; ур. 2) $x=ay$—въ Декартовыхъ координатахъ—прямую, а въ полярныхъ, принимая x за радіусъ векторъ, а y за полярный уголъ—Архимедову спираль.

Принимая во вниманіе недостатокъ времени, удѣляемаго

на прохожденіе аналитич. геометріи, и имѣя въ виду изложеніе анализа безконечно-малыхъ, возможно было бы въ курсѣ аналитической геометріи для средней школы совершенно не говорить о касательныхъ къ эллипсу, гиперболѣ и параболѣ, ограничиваясь только выводомъ ур. касательной къ кругу, разсматривая касательную какъ прямую, перпендикулярную къ радіусу въ точкѣ касанія.

ВЫСТАВКА.

Организація выставки при I всероссійскомъ съѣздѣ преподавателей математики была поручена особой комиссіи, въ составъ которой вошли слѣдующія лица: С. А. Богомоловъ, В. Н. Гартьеръ, М. А. Знаменскій, И. Н. Кавунъ, А. Р. Кулишеръ, В. Р. Мрочекъ, Д. Э. Теннеръ (предсѣдатель), Н. А. Томилинъ, Ф. В. Филипповичъ, М. Л. Франкъ, П. С. Эренфестъ и Т. А. Эренфестъ.

Общій планъ подготовительной работы комиссіи заключался въ томъ, что она, пользуясь пособіями Педагогическаго музея в. уч. з., составила основную коллекцію пособій по математикѣ. Съ этой цѣлью комиссія пересмотрѣла всѣ имѣвшіяся въ Педагогическомъ музеѣ пособія по математикѣ, пополнила ихъ частью выпиской нѣкоторыхъ пособій отъ торговыхъ фирмъ (русскихъ и заграничныхъ), частью пособіями, изготовленными въ музеѣ подъ руководствомъ А. Р. Кулишера, И. Н. Кавуна, М. А. Знаменскаго, Д. Э. Теннера и М. Л. Франка. Съ другой стороны, комиссія составила списки фирмъ, изготовляющихъ пособія по математикѣ и издающихъ книги математическаго и методическаго содержанія, и вошла съ ними въ сношенія съ цѣлю привлечь ихъ къ участію въ выставкѣ.

Работа эта была слѣдующимъ образомъ распредѣлена между членами комиссіи: оборудованіе лабораторнаго стола взялъ на себя В. Р. Мрочекъ, отдѣлъ ариѳметики—В. Н. Гартьеръ, М. А. Знаменскій и И. Н. Кавунъ, отдѣлъ геометріи—А. Р. Кулишеръ и Д. Э. Теннеръ, отдѣлъ графикъ—Д. Э. Теннеръ, Н. А. Томилинъ и М. Л. Франкъ, отдѣлъ математической учебной литературы—Ф. В. Филипповичъ.

Во всѣхъ подготовительныхъ работахъ принимали дѣятельное участіе и оказывали серьезную помощь слѣдующія лица изъ числа учащихся на курсахъ для подготовки учителей въ кадетскіе корпуса въ Педагогическомъ Институтѣ, на Высшихъ Женскихъ Курсахъ, спб. университетѣ и Технологическомъ институтѣ: И. Ф. Акимовъ, Е. А. Алексѣева, А. В. Анучинъ, А. Б. Благодатова, Бодалева, А. П. Бѣляникова, В. Ф. Вильнитъ, С. М. Витковская, Д. В. Волькенау, Н. П. Говорова, Б. В.

Грибовскій, А. В. Давыдовъ, М. А. Добромыслова, В. К. Дормидонтова, В. А. Дубровинъ, А. Е. Дувина, Б. К. Егоровъ, А. Ю. Зааль, К. И. Зрене, Л. Н. Кашинцева, А. А. Козлова, Е. И. Колнабечъ, Е. А. Кондратьева, Ѳ. Ѳ. Крыловъ, А. Н. Лаврентьева, Т. А. Недзельская, Л. А. Нестерева, Я. Г. Несторовичъ, И. У. Носалевичъ, Макарьева, А. В. Миловидова, Л. С. Орлова, Павлова, Д. М. Пашкевичъ, Пернадзе, Рабанношкова, С. Ю. Рапопортъ, Н. М. Савичъ, А. С. Семко-Савойская, Т. Г. Смирнова, Соколина, А. Л. Сорокинъ, Б. А. Тарабутинъ, Н. А. Тарасевичъ, В. А. Тяжелова, З. Я. Чумакова, Ю. Г. Шиперко и Ярошъ.

Эти же лица помогали выставочной комиссіи въ пріемѣ прибывавшихъ на выставку пособій, распредѣленіи ихъ въ выставочномъ помѣщеніи, а по окончаніи съѣзда въ возвращеніи пособій экспонентамъ.

Въ работѣ по распредѣленію и пріему пособій принимали участіе всѣ члены выставочной комиссіи, но особенный трудъ выпалъ на долю избраннаго комиссіей комиссара выставки, М. А. Знаменскаго.

Для облегченія членамъ съѣзда обозрѣнія выставки членами выставочной комиссіи давались въ опредѣленные часы объясненія; для той же цѣли на выставкѣ были учреждены постоянныя дежурства учащейся молодежи изъ числа принимавшихъ участіе въ подготовительной къ съѣзду работѣ.

Наконецъ, послѣдней задачей былъ выпускъ описанія выставки. Недостатокъ денежныхъ средствъ и неопредѣленность ихъ заставили значительно затянуть появленіе описанія и сократить его до возможнаго минимума.

Ниже приведено описаніе выставки, которое было составлено слѣдующими лицами: I. Пособія Педагогическаго музея в. уч. заведеній: а) лабораторный столъ — В. Р. Мрочекомъ, б) ариѳметика — И. Н. Кавуномъ, в) геометрія — А. Р. Кулишеромъ, г) графика — М. Л. Франкомъ. II. Пособія, выставленныя отдѣльными фирмами и лицами, — З. Я. Чумакова; послѣдней также принадлежитъ составленіе списковъ пособій, относящихся къ каждой иллюстраціи.

Д. Теннеръ.

Пособія Педагогическаго Музея в.-уч. Заведеній.

Лабораторный столъ (Т. I).

При оборудованіи лабораторнаго стола руководились слѣдующими соображеніями:

1. «Столъ» долженъ содержать инструменты и матеріалы, необходимые для самостоятельныхъ ученическихъ работъ.

2. На нѣсколькихъ примѣрахъ долженъ быть показанъ ходъ изготовленія моделей, пособій, иллюстрацій и пр.

На приведенномъ снимкѣ расположены: слѣва—инструменты и матеріалы для картонажныхъ работъ, а справа—для металлическихъ. Кромѣ того, на столѣ помѣщены и нѣкоторые образцы работъ.

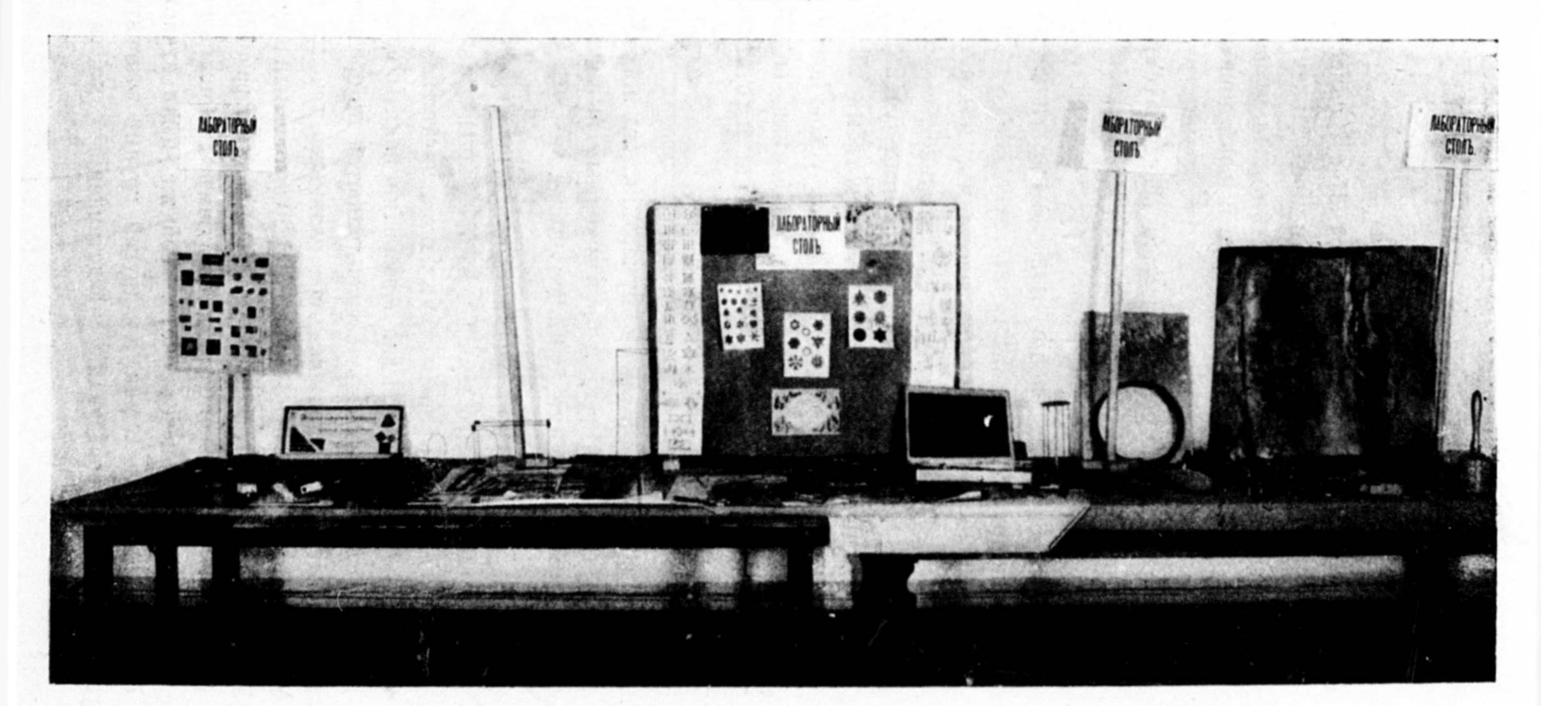
Картонажныя работы. Модель куба (вычерчиваніе развертки, вырѣзываніе, сгибаніе); различныя доли единицы—въ частяхъ прямоугольника; умноженіе дроби на дробь и др.

Металлическія и деревянныя работы. Брусъ изъ спицъ и пробокъ, съ діагоналями; брусъ съ діагоналями, подвижной, изъ «трубочекъ Мрочека»; подвижной четыреугольникъ изъ «трубочекъ»; индусскій разборный кругъ и др.

Лѣпныя работы. Нѣкоторыя тѣла изъ пластилина; сѣченія бруса, изъ мыла и др.

Прим. Подробный перечень инструментовъ, матеріаловъ и работъ см. въ «Каталогѣ Экспонатовъ Педагогическаго Музея», 1912 г., стр. 251 и далѣе.

Таблица I.



Надъ столомъ: образцы для работъ изъ цвѣтной бумаги.
" " " деревян. палочекъ.
Матеріалъ для работы изъ металла.

На столѣ: матеріалъ, инструменты для работъ.
Приготовленныя модели.

Ариѳметика (Т. II и III).

Въ отдѣлѣ выставки, организованномъ Педагогическимъ Музеемъ Военно-учебныхъ заведеній, были представлены по ариѳметикѣ, главнымъ образомъ, тѣ пособія, которыя относятся къ курсу среднихъ учебныхъ заведеній. При выборѣ приборовъ устроители обращали свое вниманіе на простоту конструкціи, такъ какъ сложность и вычурность пособія всегда затемняетъ ту мысль, которую должно сдѣлать ясной. Избѣгались универсальные приборы (за исключеніемъ «русскихъ счетовъ»), такъ какъ постоянное употребленіе прибора притупляетъ къ нему интересъ учениковъ. На выставкѣ отведено мѣсто не только такъ называемымъ класснымъ пособіямъ, на которыя учащіеся во время объясненія учителя только смотрятъ, но и работамъ, которыя выполняются самими учениками. Эти послѣднія должны служить важнымъ средствомъ къ поднятію у учениковъ рабочаго настроенія и къ усвоенію предмета. Къ сожалѣнію, устроители выставки не имѣли возможности собрать ученическія работы, но зато были изготовлены модели и діаграммы такихъ работъ.

Пособія подобраны такъ, чтобы они иллюстрировали основныя идеи курса: понятіе о числѣ и нумераціи, законы ариѳметическихъ дѣйствій, измѣренія, приближенныя вычисленія, зависимость между величинами, дробныя числа.

Понятіе о числѣ. Какъ уже упомянуто выше, коллекціи Педагогическаго Музея предназначены, главнымъ образомъ, для нуждъ средней школы, чѣмъ и объясняется незначительное число пособій, служащихъ для образованія понятія цѣлаго числа,—понятія, съ которымъ дѣти уже являются въ среднюю школу, какъ съ готовымъ. Однакоже, оба главныхъ теченія въ области методики представлены. Приборъ Лай'я—классный и ручной (табл. II)—является представителемъ пособій для образованія понятія о числѣ непосредственнымъ воспріятіемъ числовыхъ фигуръ, независимо отъ процесса счета. Той же цѣли отчасти можетъ служить аппаратъ Борна. Къ другой группѣ относятся приборы, связывающіе образованіе представленія о числѣ съ

Верхъ. Квадратныя мѣры: метръ (1000000 кв. мм.); аршинъ, раздѣл. на кв. вершки; футъ, „ „ „ дюймы; дециметръ; вершокъ; дюймъ.

Діаграммы: 1) расходъ Россіи на народное образованіе въ 1903 году;

2) учащихся въ начальныхъ школахъ на 100 душъ населенія.

Середина: 3) грамотность въ Россіи въ 1897 г.

Графики: 1) измѣненія разстоянія съ теченіемъ времени при равномѣрномъ движеніи.

Низъ: приборъ Аксюка; счеты Лая (классные и ручные); Дуговые счеты Канаева; Абакъ Кавуна; приборъ Тиллиха.

Кубич. мѣры: 1) метръ (1000000 кб. см.);

2) аршинъ;

3) футъ изъ папки, раздѣл. на кб. дюймы;

4) футъ изъ деревянныхъ палокъ;

5) дециметръ: а) изъ папки, б) изъ дерева;

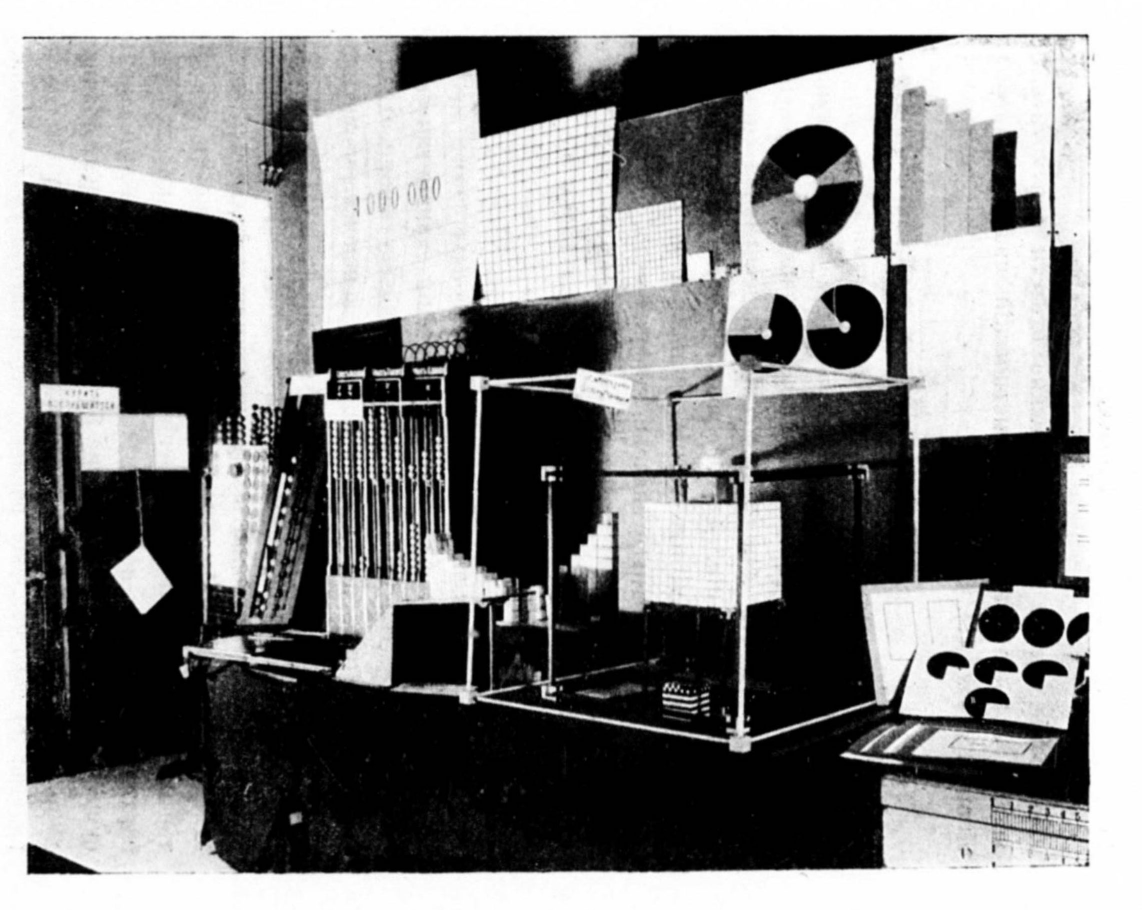
6) вершокъ;

7) дюймъ.

Примѣръ сопоставленія распредѣленія и сочетанія закона.

Картограммы, относящіяся къ курсу дробей: 1) $^{19}/_{8} = 2\,^{3}/_{8}$;

2) образованіе $^{3}/_{4}$ изъ 1; 3) число 3 раздѣлено на 4 равныя части.



процессомъ счета. Къ нимъ можно отнести ариѳметическій ящикъ, приборъ Тиллиха, ариѳметическій ящикъ Познера и Лангера (табл. II).

Нумерація. Слѣдующія ступени въ обученіи ариѳметикѣ, связаны съ десятичной нумераціей.

Для нагляднаго ознакомленія съ нею могутъ служить упомянутые выше приборы Тиллиха, Познера и Лангера. Приборы эти служатъ для ознакомленія съ десятичной системой въ устномъ счисленіи. Другой родъ приборовъ служитъ для установленія перехода отъ устной нумераціи къ письменной и для уясненія помѣстнаго значенія цифръ числа. Къ нимъ надо отнести русскіе счеты, шведскіе счеты, дугообразные счеты Канаева, абакъ Кавуна; въ послѣднемъ выдѣлены не только разряды, но и классы.

Дѣйствія и ихъ законы. Нѣкоторыя изъ упомянутыхъ пособій могутъ быть полезны при изученіи ариѳметическихъ дѣйствій, какъ, напр., русскіе счеты; они, однакоже, неудобны какъ пособія при изученіи законовъ ариѳметическихъ дѣйствій. Для этой цѣли изготовлены подъ руководствомъ И. Н. Кавуна картограммы, представляющія образцы работъ, которыя могутъ выполняться учениками на клѣтчатой бумагѣ; здѣсь поясняются: 1) сложеніе и вычитаніе отрѣзковъ, на которыхъ разъясняется опредѣленіе вычитанія какъ дѣйствія обратнаго сложенія, перемѣстительный и сочетательный законы суммы; 2) измѣненіе разности; 3) перемѣстительный законъ умноженія: сомножители—число клѣтокъ въ ряду и число рядовъ; 4) сопоставленіе распредѣлительнаго и сочетательнаго законовъ: сомножители—число клѣтокъ въ ряду и число рядовъ; 5) иллюстрація сочетательнаго закона умноженія; 6) сравненія, — измѣненія суммы и произведенія при умноженіи данныхъ чиселъ на одно и то же число; 7) измѣненіе произведенія при увеличеніи въ нѣсколько разъ сомножителей (табл. II).

Для иллюстраціи абсолютной погрѣшности суммы, разности и произведенія приведены картограммы: слагаемыя числа изо-

бражены прямыми отрѣзками; построена сумма приближенныхъ чиселъ и суммы ихъ предѣльныхъ значеній; отсюда видно, что абсолютная погрѣшность суммы равна суммѣ абсолютныхъ погрѣшностей слагаемыхъ.

Подобная же графика дана для разности.

Произведеніе двухъ приближенныхъ чиселъ представлено въ видѣ площади прямоугольника, стороны котораго изображаютъ данные сомножители. Абсолютная погрѣшность произведенія выражается суммой двухъ прямоугольниковъ.

Понятіе о дробяхъ и дѣйствія надъ ними.

Составленію конкретнаго представленія о дроби посвящено много пособій. Одни изъ нихъ, какъ дробные счеты, приборъ Брухмана, дробн. счетчикъ Филипповича (табл. II и III), носятъ характеръ пассивный, при пользованіи которыми ученикъ самъ не принимаетъ участія въ изготовленіи долей и дробныхъ частей единицы; другія, представленныя въ видѣ картограммъ, служатъ образчиками ученическихъ работъ, съ помощью которыхъ можно дать ученикамъ живыя конкретныя представленія о дроби, о раздробленіи дробей въ болѣе мелкія доли и объ обратной операціи, о дѣйствіяхъ съ простѣйшими дробями. Дѣйствія при этомъ выполняются устно, безъ особыхъ правилъ, по соображенію. Дробь обозначается въ видѣ части отрѣзка прямой, квадрата или круга. Такимъ образомъ, единица не фиксирована. Для лучшаго различенія дроби, части квадрата и круга закрашиваются или заклеиваются цвѣтной бумагой (бумага альбомная или «подъ кожу»). Упражненія съ простѣйшими дробями составляютъ необходимую ступень для перехода къ систематическому курсу дробей.

Къ числу такихъ упражненій надо отнести:

1) Образованіе дроби: $\frac{3}{4}$ отрѣзка, квадрата и круга.

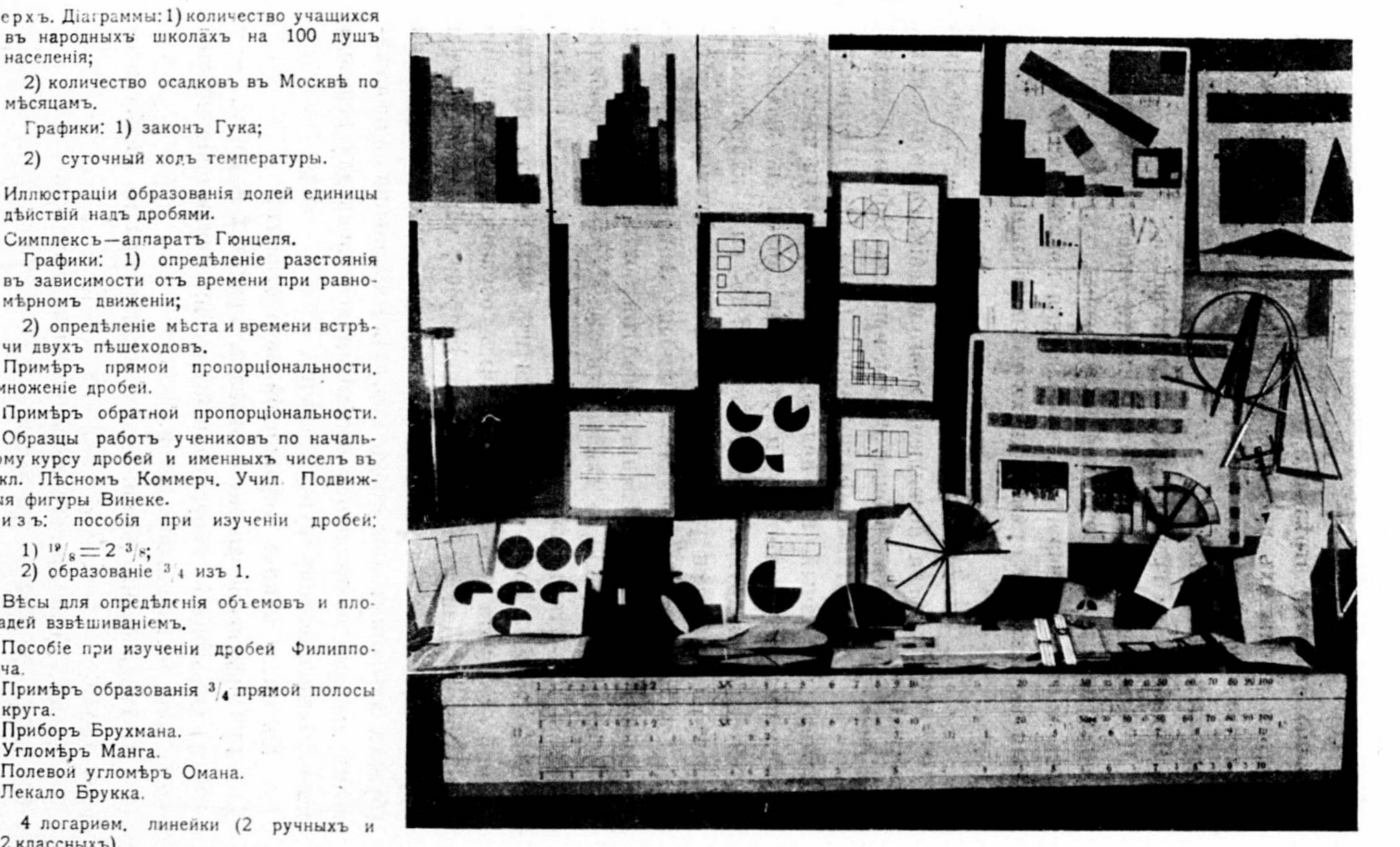
2) Образованіе неправильной дроби; исключеніе цѣлаго числа изъ неправильной дроби.

3) Раздробленіе долей; доли представлены въ видѣ секторовъ круга: $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}=\frac{8}{16}$; $\frac{1}{4}=\frac{2}{8}=\frac{4}{16}$; $\frac{1}{8}=\frac{2}{16}$.

То же. Доли представлены частями квадрата.

$\frac{1}{2}=\frac{3}{6}=\frac{9}{18}$; $\frac{1}{3}=\frac{3}{9}=\frac{6}{18}$.

Таблица III.



Верхъ. Діаграммы: 1) количество учащихся въ народныхъ школахъ на 100 душъ населенія;

2) количество осадковъ въ Москвѣ по мѣсяцамъ.

Графики: 1) законъ Гука;

2) суточный ходъ температуры.

Иллюстраціи образованія долей единицы и дѣйствій надъ дробями.

Симплексъ—аппаратъ Гюнцеля.

Графики: 1) опредѣленіе разстоянія въ зависимости отъ времени при равномѣрномъ движеніи;

2) опредѣленіе мѣста и времени встрѣчи двухъ пѣшеходовъ.

Примѣръ прямой пропорціональности. Умноженіе дробей.

Примѣръ обратной пропорціональности.

Образцы работъ учениковъ по начальному курсу дробей и именныхъ чиселъ въ 8 кл. Лѣсномъ Коммерч. Учил. Подвижныя фигуры Винеке.

Низъ: пособія при изученіи дробей:

1) $^{19}/_{8} = 2\,^{3}/_{8}$;

2) образованіе $^{3}/_{4}$ изъ 1.

Вѣсы для опредѣленія объемовъ и площадей взвѣшиваніемъ.

Пособіе при изученіи дробей Филипповича.

Примѣръ образованія $^{3}/_{4}$ прямой полосы и круга.

Приборъ Брухмана.

Угломѣръ Манга.

Полевой угломѣръ Омана.

Лекало Брукка.

4 логариѳм. линейки (2 ручныхъ и 2 классныхъ).

4) Сложеніе дробей: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. Доли выражены частями круга.

То же: доли взяты какъ части двухъ квадратовъ.

5) Дѣленіе доли: $\frac{1}{4}:3$; $\frac{1}{4}$ изображена секторомъ.

То-же. $\frac{1}{4}$ изображена въ видѣ квадрата.

6) По данной одной долѣ числа найти цѣлое число: часть числа обозначена на клѣтчатой бумагѣ нѣсколькими клѣтками.

По нѣсколькимъ долямъ числа отыскать цѣлое число (на клѣтчатой бумагѣ).

7) Дѣленіе дробей: $2\frac{2}{3}:\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}:2$; $\frac{4}{5}:2$. Всѣ дроби представлены какъ части квадратовъ, на клѣтчатой бумагѣ.

8) Умноженіе дробей: $\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$.

Взято $\frac{2}{3}$ отъ $\frac{4}{5}$ квадрата: доли получаются пятнадцатыя.

9) Число 3 раздѣлено на 4 равныя части. Единица обозначена кружкомъ.

Идея зависимости величинъ.

Идея зависимости между величинами нашла выраженіе только въ двухъ группахъ работъ, которыя могутъ быть выполнены самими учениками.

Изображеніе прямой и обратной пропорціональности.

1) Измѣненіе площади прямоугольника въ зависимости отъ измѣненія его высоты.

2) Измѣненіе площади сектора при измѣненіи его дуги.

3) Измѣненіе основанія прямоугольника въ зависимости отъ измѣненія его высоты при постоянной площади; площадь прямоугольника взята равной 48 кв. ед. на клѣтчатой бумагѣ.

Графики, дающія возможность судить объ измѣненіи явленія. Доступны для пониманія учениковъ младшихъ классовъ. Исполнены подъ руководствомъ М. А. Знаменскаго.

1) Обозначеніе разстоянія и времени при равномѣрномъ движеніи: пѣшеходъ движется со скоростью 4 верстъ въ часъ. Узнать пройденное имъ разстояніе въ 2, 5 ч.; черезъ сколько времени онъ будетъ на разстояніи 14 в.? Разстояніе и промежутки времени откладываются на осяхъ координатъ.

4) Измѣненіе температуры за сутки. Промежутки времени (каждый часъ) откладываются на оси X, значенія температуры— на оси $У$.

3) Вытяженіе пружины при измѣненіи подвѣшеннаго къ ней груза (законъ Гука): значенія груза и длины пружины нанесены на осяхъ координатъ.

4) Количество осадковъ въ Москвѣ по мѣсяцамъ изображены въ видѣ раскрашенныхъ столбиковъ, длина которыхъ пропорціональна количеству осадковъ.

Изображеніе относительнаго значенія величинъ съ помощью раскрашенныхъ секторовъ круга:

1) Расходъ въ Россіи на народное образованіе: общая сумма обозначена кругомъ, части ея—секторами.

2) Грамотность въ Россіи. Общее число жителей—кругъ; числа грамотныхъ и неграмотныхъ—секторы.

Какъ примѣръ ознакомленія дѣтей съ дробями приведены работы, исполненныя въ 8-классномъ Коммерческомъ Училищѣ въ Лѣсномъ.

На первой изъ двухъ таблицъ показаны нѣкоторые пріемы иллюстраціи начальнаго курса дробей при помощи прямоугольныхъ полосъ и прямоугольныхъ параллелопипедовъ (плитокъ или брусковъ).

Двѣ полосы одной и той же (но произвольной) длины дѣлятся путемъ сгибанія или при помощи раздѣленной линейки соотвѣтственно: одна на 2, 4, 8 и т. д. части, другая—на 3, 6, 12, 24 части. Діаграмма, составленная изъ этихъ полосъ, позволяетъ обозрѣть сравнительную величину этихъ долей.

На той же діаграммѣ показаны сложеніе и вычитаніе дробей, и весьма важный при изученіи дѣленія дробей моментъ (содержаніе одной какой-нибудь доли въ единицѣ, напр., $1 : \frac{1}{9}$) изображенъ при помощи прямоугольныхъ плитокъ, изготовленныхъ изъ дюймов. бумаги (или изъ развертокъ, наносимыхъ на бумагу самимъ ученикомъ).

Въ тетрадяхъ учащихся, прикрѣпленныхъ къ таблицѣ, содержатся тѣ же работы въ томъ видѣ, въ какомъ онѣ выполняются дѣтьми на урокахъ.

Вторая таблица даетъ представленіе объ одномъ изъ уроковъ ариѳметики на открытомъ воздухѣ.

На фотографіяхъ [1]) показано: а) измѣреніе длины зданія, b) обхвата дерева и с) высоты зданія.

Изъ разнообразныхъ мѣръ вѣса и протяженія представлены тѣ, главнымъ образомъ, которыя не получили еще широкаго распространенія, и тѣ, которыя могутъ быть изготовлены самими учениками; какъ-то: мѣры длины, изготовленныя изъ миллиметровой и дюймовой бумаги; мѣры площадей (кв. метръ, аршинъ, футъ, дециметръ, вершокъ и дюймъ), главнымъ образомъ, изъ готовой графической бумаги; мѣры объемовъ (куб. метръ, аршинъ, футъ, дециметръ, вершокъ, дюймъ и сантиметръ), частью изготовленные изъ палочекъ, соединенныхъ при помощи кубиковъ съ тремя отверстіями, частью изъ картона.

На выставкѣ были представлены нѣкоторыя измѣрительныя работы. Цѣль этихъ работъ—дать понятіе о приближенныхъ числахъ. Только въ томъ случаѣ, если ученики сами производятъ измѣренія, они могутъ пріобрѣсти понятіе о приближенныхъ значеніяхъ величинъ и о зависимости точности измѣренія отъ приборовъ. Производя измѣренія и вычисленія, относящіяся къ одному и тому же предмету, и сравнивая между собою результаты, учащіеся научаются понимать смыслъ погрѣшности. Наконецъ, эти работы пріучаютъ къ пользованію математикой, какъ орудіемъ при изученіи явленій съ количественной стороны, и даютъ хорошія, вполнѣ конкретныя задачи для упражненія въ ариѳметическихъ дѣйствіяхъ. Вычисленія съ приближенными числами можно сдѣлать доступными для учениковъ 3—4 классовъ среднихъ учебныхъ заведеній. Работы были подобраны такія, которыя не требуютъ особой спеціальной подготовки. Взяты онѣ могутъ быть изъ руководствъ къ практическимъ занятіямъ по физикѣ. Вотъ образцы такихъ работъ:

Опредѣлить среднюю толщину мѣдной пластинки, зная плотность мѣди и измѣряя массу пластинки.

---

[1]) На фотографіи, къ сожалѣнію, эти графики не видны, за исключеніемъ одной.

Найти плотность алюминія, измѣряя массу алюминіеваго цилиндра, его высоту и діаметръ основанія.

Опредѣлить плотность мѣди, измѣряя массу и размѣры прямоугольнаго параллелопипеда.

Вычислить отношеніе длины окружности металлическаго круга къ длинѣ его діаметра, сравнивая массы круга и квадрата, сторона котораго равна радіусу круга.

Были выставлены угломѣръ Манга для измѣренія угловъ возвышенія и универсаль-угломѣръ Омана, могущій служить и для снятія плана, и для нивелировки. Оба прибора въ рукахъ учениковъ могутъ служить для рѣшенія задачъ на мѣстности и для полученія изъ этихъ задачъ числового матеріала для обработки.

Слѣдующіе два прибора служатъ для упражненія въ «оцѣнкѣ на глазъ».

Деревянный метръ съ движущимся по нему указателемъ. Преподаватель держитъ метръ обращеннымъ глухой стороной къ ученикамъ и дѣленіями къ себѣ. Учащіеся опредѣляютъ на глазъ часть метра или длину, отмѣченную указателемъ.

Ручной самодѣльный угломѣръ, состоящій изъ картоннаго квадрата, на которомъ наклеена половина бумажнаго транспортира (цѣна 5 коп.); по шкалѣ движется картонный указатель. Каждый изъ учениковъ, имѣя такой угломѣръ, опредѣляетъ сперва на глазъ уголъ зрѣнія, затѣмъ производитъ провѣрку съ помощью угломѣра.

Въ качествѣ приборовъ для вычисленій, доступныхъ школѣ по цѣнѣ и по способу примѣненія, выставлены логариѳмическія линейки, стоимостью номин. отъ 0,75 м. и до 12 м. Здѣсь же помѣщена большая классная линейка, длиною 2 м. [1]).

Деревянная классная логариѳмическая линейка большихъ размѣровъ.

Логариѳмическая линейка съ целлулоидной шкалой, съ цилиндрическимъ стекломъ, длина 27 см. (Wichmann, Berlin,

---

[1]) Линейки эти были доставлены на выставку Политехническими курсами т-ва профессоровъ и преподавателей.

Karlstr., 13; № по каталогу 474; ц. 8 мк. Лупа къ ней отдѣльно стоитъ 3,50 м.). Линейка служитъ для умноженія, дѣленія, возвышенія въ квадратную и кубическую степени, извлеченія квадр. и куб. корней и для вычисленій съ синусами и тангенсами.

Карманная логариѳмическая линейка, 15 см. длины. На обратной сторонѣ подвижной линейки шкала съ синусами и тангенсами (Wichmann. № 458. Ц. М. 4,50).

Логариѳмическая линейка изъ картона. Даетъ возможность умножать, дѣлить, возвышать во вторую и третью степени и извлекать кв. и куб. корни (Wichmann, № 431; ц. 1 м., руководство къ ней—0,25 м.). Рекомендуемъ для учащихся. Длина 27 см.

Линейки № 41 и 43 позволяютъ получать результаты съ тремя значущими цифрами; карманная же линейка, какъ болѣе короткая, даетъ менѣе точные результаты.

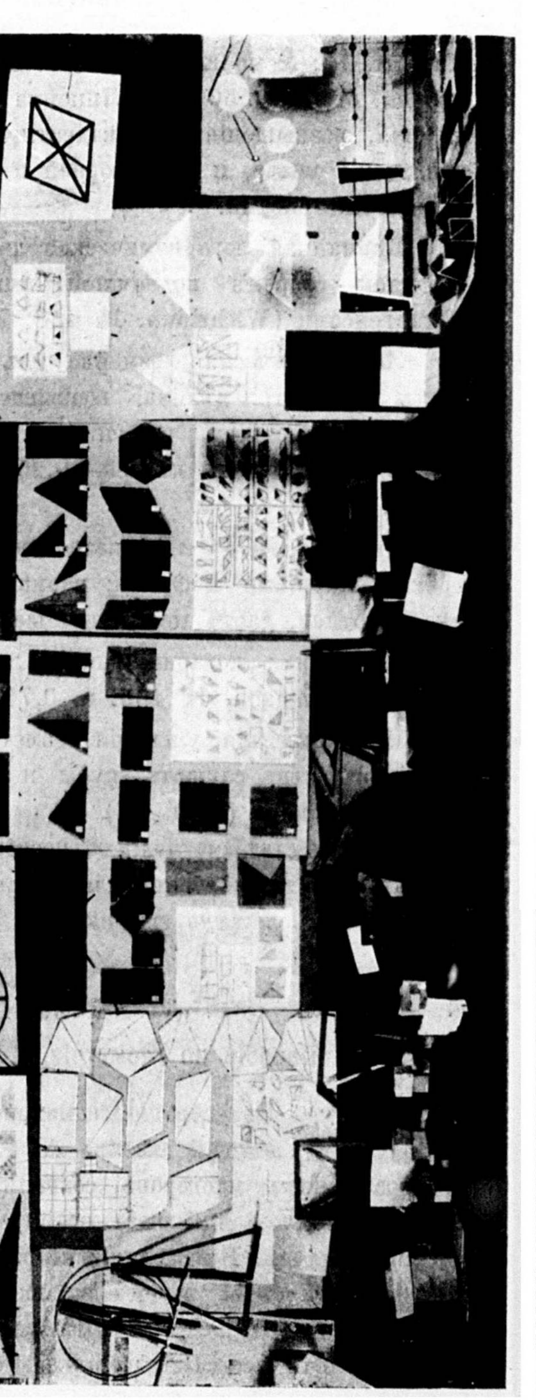
Карманная логариѳмическая линейка изъ картона, длиной 13 см. (Wichmann, № 466, ц. 0,75 м.).

Пособіями для уясненія геометрическаго значенія числовыхъ тождествъ служатъ кубы и квадраты, построенные на суммѣ отрѣзковъ (табл. VI).

Въ качествѣ нагляднаго пособія при преподаваніи математики, преимущественно для выясненія идеи функціональной зависимости, служатъ графики.

Пособія по геометріи (Т. IV, V и VI).

Общій обзоръ. Въ собраніе геометрическихъ моделей и другихъ пособій вошли: А) Коллекціи работы русскихъ и заграничныхъ мастеровъ, сохранившія свое значеніе по настоящее время и имѣющія потому не одинъ только историческій интересъ. Б) Различныя пособія, пріобрѣтенныя Педагогическимъ Музеемъ за послѣдніе годы. В) Нѣкоторыя модели и таблицы, изготовленныя во вторую половину 1911 года для выставки при Первомъ Всероссійскомъ съѣздѣ



Верхъ: Симплексъ-аппаратъ Гюнцеля. Коллекція наглядныхъ пособій Франка состоитъ: изъ 1) подвижныхъ стержней, 2) дерев. тр-овъ Модели по Трейтлейну: 1) преобразованіе трапеціи въ параллелогр., 2) преобразованіе треугольника въ параллелогр. Симметрія относит. точки на плоскости. Примѣръ симметріи—ромбъ. Средина: Подвижныя фигуры Винеке. Модели Кеппа: 1) для вычисленія площади, 2) для установленія понятія о равновеликости, 3) для превращенія фигуръ, 4) для установленія понятія о конгруэнціи. Модели по Трейтлейну — преобразованіе треугольниковъ въ 4-угольники. Табл. Теннера для иллюстр. синтеза и анализа древнихъ.

Низъ: Подвижныя фигуры Виннеке. Кубъ двучлена и трехчлена (разборные). Подвижной параллелогр. Теннера изъ картонныхъ пластинокъ. Ящикъ съ инструментами къ коллекціи нагляднъ. пособій Франка. Пособіе Криницына: наборъ кубовъ, разрѣзанныхъ на пирамиды и призмы. Дерев. призматоидъ Максимова. Коллекція развертокъ и разборныхъ геом. тѣлъ Мрочека и Филипповича. Трехгранныя призмы, разрѣзанныя на 3 равновеликія пирамиды работы Максимова. Примѣры симметріи относительно плоскости: а) поверхности, б) точекъ. Пособіе Кюстера. Фигура изъ 6 квадратовъ, дающая при свертываніи кубъ.

преподавателей М
выборѣ пособій для вы
лись слѣдующими сообр

Одно и то же
жетъ найти рядъ
примѣненій въ сил
строенія моделей или
нѣкоторой опредѣленно
коллекціи. Въ другихъ с
видимому, надлежитъ
почтительно для о
либо опредѣленной

Разсмотрѣніе геометрическихъ образовъ со стороны ихъ формы и со стороны ихъ размѣровъ.

Со
рактер
предмет
странс
не толь
размѣр

нія (направленіе геомет
со стороны ихъ формы,
ложенія ихъ частей
никновенія, способа
п. Къ каждой модели
этихъ двухъ точекъ

Расширеніе вопроса. Сѣченія геометрическихъ образовъ.

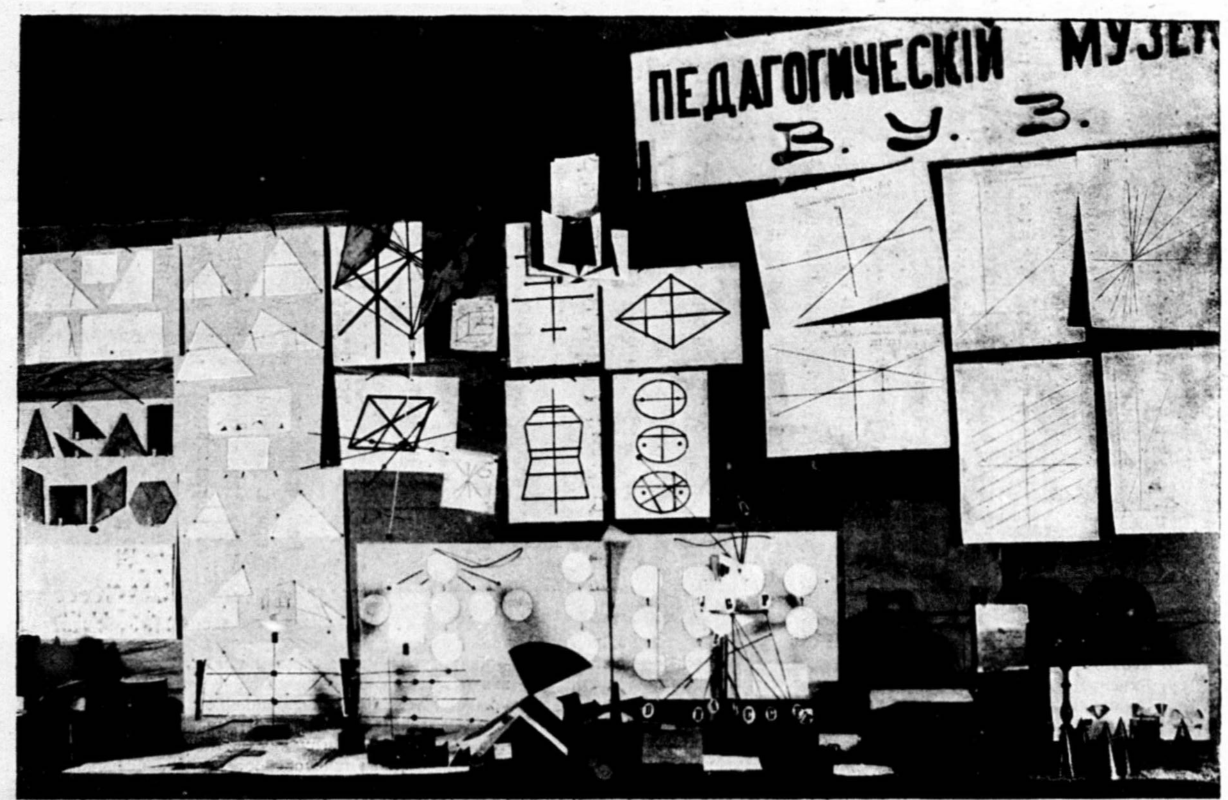
Дал
пособія
упомянут
нія може

димость въ дальн
ніи и расширеніи

[1]) Въ изготовленіи послѣ
слушательницы Женскаго Пед
СПБ.: Е. А. Алексѣева, С. М.
Н. М. Савичъ, З. Я. Чумакова

[2]) Рядъ болѣе детальны
пользованія наглядными посо
занъ въ докладѣ Д. Э. Тенн
Преп. Матем.», т. I. Стр. 223.

Таблица V.



Верхъ: модели по Трейтлейну:

1) преобразованіе трапеціи въ параллел.,

2) преобразованіе треугольника въ параллелограммъ.

Симметрія относильно точки на плоскости: а) точекъ; b) параллелограмма.

Симметрія относительноосина плоск.; а) точекъ; b) „змѣй"; с) эллипсовъ; d) ломанной линіи.

Симметрія относительно точки въ простран.: а) точекъ; b) куба.

Поверхности симметричныя относительно оси въ пространствѣ.

Графики: рѣшеніе уравненія $ax+b=0$, перевода температуры (C, R, и F) $y=mx$ (варіація m). Системы ур-ій: $ax+by+c=0$, $a_1x+b_1y+c_1=0$; $y=ax+b$ (варіація b). Перерод въ вѣса.

можетъ встрѣтиться надобность въ распространеніи этого изученія не только на ознакомленіе съ тѣми признаками, по которымъ данный образъ (напримѣръ, какое-нибудь геометрическое тѣло) отличается отъ другого тѣла, не только характеромъ его элементовъ, но и характеромъ его сѣченій, въ простѣйшемъ случаѣ сѣченій плоскихъ, въ болѣе сложныхъ—пересѣченій его другими поверхностями.

Пересѣченіе даннаго тѣла даже плоскостями, въ свою очередь, можетъ быть очень простымъ, но можетъ быть и весьма сложнымъ и требующимъ значительно развитой способности воображенія, въ зависимости отъ цѣлей разсѣченія, отъ мѣста разсматриваемаго вопроса въ курсѣ отъ характера самого курса и т. д.

Такія пособія, какъ, напримѣръ, коллекція Гашетта [1]), коллекція Ожаровскаго или аналогичныя коллекціи (быть-можетъ, въ нѣсколько увеличенномъ размѣрѣ и съ незначительными измѣненіями въ смыслѣ дополненій и окраски), могли бы удовлетворить тѣмъ требованіямъ, какія возникаютъ при обстоятельномъ даже изученіи курса геометріи по учебнику Лежандра (или примыкающимъ къ нему другимъ курсамъ) и рѣшеніи соотвѣтственныхъ задачъ на построеніе, могли и могутъ въ настоящее время иллюстрировать и другіе курсы, нѣсколько иначе построенные, помочь пониманію чертежей, изображающихъ на плоскости образы трехъ измѣреній. Сказанное сохраняетъ свою силу по отношенію къ названнымъ пособіямъ и въ томъ случаѣ, если пособія эти даже не будутъ прямо «показываться» учащимся, но станутъ предметомъ совмѣстной разработки учителемъ и учащимися и т. д. Равнымъ образомъ

[1]) См. изображенія этого и другихъ нижепоименованныхъ пособій на соотвѣтствующихъ таблицахъ.

Низъ: опредѣленіе объема шара на основаніи принципа Кавальери. Примѣръ симметріи относит. плоскости: а) поверхн.; b) точекъ. 2 фиг. изъ 6 квадратовъ; одна свертывающаяся въ кубъ, другая—нѣтъ. Пособіе Кюстера. Три трехгранныхъ угла: а) два изъ нихъ равны; b) два симметричны. Пособіе Блюммеля Больдта. Наборъ стереоскопич. картинъ по стереометріи. Прозрачныя тѣла Латвезена. Разборный шаръ Шварца. Ящикъ съ моделями геом. тѣлъ для рисованія съ натуры (англ. изданіе). Коллекціи развертокъ Ожаровскаго, тѣлъ Гашетта (къ курсу Лежандра), Ожаровскаго, Гашетта, развертокъ поверхностей Edward'a.

Таблица VI.

Верхъ: Графики: I рядъ $y = mx$ (варіаціи m).

$ax + by + cz + d = 0$

Рѣшеніе системы ур-ій: $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

Рѣшеніе новаго ур-ія $x^2 + px + q = 0$ (двѣ таблицы).

Рѣшеніе системы кв-ыхъ ур-ій $y = x^2 + px + q$, $x = y^2 + py + q$

$y = x^2 + ax$ (варіація a).

Конфокальн. параболы.

Построенія параболы.

II рядъ: Перевода вѣса.

Рѣшеніе кв-аго ур-ія $x^2 + px + q = 0$ (двѣ табл.)

Система ур-ій $y = x^2$, $y = +\sqrt{x}$

$y = mx$ (варіаціи m).

Конфокальн. эллипсы и гиперболы.

Построенія эллипса.

Графикъ корней ур-ія $x^3 + px^2 + qx + r = 0$

Низъ: Большой разборный конусъ.

8-гранная призма Максимова.

Коллекція бѣлыхъ дерев. тѣлъ Криницына.

3 конуса разборныхъ съ полушаріями къ нимъ Струкова.

Коллекція моделей Ожаровскаго.

" " Гашетта.

" " Паравія.

Шаръ съ сѣченіями Ожаровскаго.

многое сохранитъ свою цѣнность въ смыслѣ ознакомленія съ признаками и особенностями пространственныхъ образовъ, если будутъ допущены тѣ или иныя отступленія отъ курса Лежандра въ направленіи переплетенія планиметріи съ стереометріей и т. д. [1]).

Вниманіе наше далѣе обращаютъ коллекціи развертокъ [2]), разсмотрѣніе которыхъ (ихъ отысканіе по даннымъ тѣламъ?) можетъ въ зависимости отъ взгляда преподавателя занять то или иное мѣсто въ курсѣ. Иногда большое количество сѣченій (какъ это иногда бываетъ въ пособіяхъ, примѣняемыхъ при изученіи равновеликости, см. ниже) въ модели можетъ заслонить предъ учащими тѣ стороны объекта, которыя желательно отмѣтить на болѣе раннихъ ступеняхъ курса, и потому пособіе, весьма полезное для одной части курса, не всегда будетъ пригоднымъ на всемъ протяженіи курса.

Измѣреніе геометрическихъ величинъ.

Къ числу пособій, въ которыхъ сторона измѣрительная отчетливо выдвинута, надо отнести такъ называемый симплексъ - аппа-

[1]) Разумѣется, мы не имѣемъ здѣсь возможности коснуться общаго вопроса о размѣрахъ примѣнимости и наглядности въ нашемъ предметѣ и отсылаемъ обозрѣвателя опять къ упомянутому выше докладу Д. Э. Теннера и къ другимъ аналогичнымъ работамъ.

[2]) Особенности отдѣльныхъ пособій и случаи ихъ примѣнимости указаны ниже въ соотвѣтственныхъ мѣстахъ общаго обзора.

ратъ, одну изъ таблицъ съ пособіями Кэппа, въ значительной мѣрѣ пособія для вычисленія объема шара на основаніи принципа Кавальери и т. п.

Съ другой стороны, пособіе Блюммеля или его видоизмѣненія [1]) можно примѣнить также для поясненія нахожденія размѣровъ площадей фигуръ или объемовъ, воспроизводимыхъ съ его помощью геометрическихъ тѣлъ, создавая соотвѣтственныя модели; но, главнымъ образомъ, интересны подобные приборы въ тѣхъ случаяхъ, когда надо изучать формы и взаимное расположеніе ихъ частей. Только-что сказанное относится также къ примѣненіямъ стереоскопа къ стереограммамъ, хотя въ числѣ послѣднихъ мы найдемъ интересную стереограмму, поясняющую нахожденіе объема прямоугольнаго параллелопипеда.

Сѣченія. Чаще всего въ геометрическихъ пособіяхъ сѣченія производятся въ цѣляхъ раздѣленія фигуры или тѣла на части, необходимыя для установленія того или другого теоретическаго положенія. Но иногда сами сѣченія становятся предметомъ изученія со стороны формы или размѣровъ. Таковы, напримѣръ, сѣченія конусовъ и цилиндровъ или сѣченія въ прозрачныхъ моделяхъ Латвезена и въ извѣстной степени шаръ Шварца, поучительныя сѣченія въ моделяхъ Дюпена. Въ послѣднихъ одновременно получаются сѣченія многогранниковъ и вписанныхъ въ послѣдніе круглыхъ тѣлъ.

Въ отдѣльныхъ пособіяхъ сѣченія, сверхъ того, служатъ объектомъ для соотвѣтственныхъ измѣреній площади (Дюпенъ, см. выше, Мрочекъ и Филипповичъ). Въ послѣднемъ пособіи на сѣченіи даже нанесена соотвѣтственно разграфленная клѣтчатая бумага; наконецъ, рядъ пособій одинаково пригоденъ для обѣихъ цѣлей, т.-е. для изученія формы въ широкомъ смыслѣ слова и числовыхъ разсчетовъ. Сюда относятся, напримѣръ, развертки и т. д.

[1]) См., напримѣръ, видоизмѣненіе, предлож. Д. Э. Теннеромъ.

Развертки съ точки зрѣнія площадей.

Матеріаломъ для опредѣленія величинъ площадей различныхъ фигуръ могутъ быть также разнаго рода развертки.

Пособіе, какъ иллюстрація методологическихъ пріемовъ и какъ средство примѣненія даннаго пріема.

Пособія могутъ также служить для преподавателя указаніемъ на существованіе извѣстнаго методологическаго пріема и средствомъ къ проведенію метода.

Движеніе.

Такъ, напримѣръ, примѣненіе движенія[1]) въ болѣе широкомъ масштабѣ, чѣмъ это дѣлалось (безъ особаго подчеркиванія) въ курсѣ Эвклида и Лежандра и т. д., и подвижныхъ моделей вызвало такія пособія, какъ модели Винеке, коллекцію Франка и сходныя съ послѣдней въ нѣкоторыхъ частяхъ заграничныя пособія и оригинальное пособіе, предложенное Д. Э. Теннеромъ, позволяющее наблюдать въ плоскости сдвигъ площади треугольника (это же пособіе полезно при изученіи равновеликости параллелограмма, высота котораго остается неизмѣнной). Раньше движеніемъ пользовались по преимуществу при изученіи тѣлъ вращенія: см., напримѣръ, пособіе П. А. Литвинскаго.

Движеніемъ пользуются также при преобразованіяхъ фигуръ, какъ это можно видѣть изъ пояснительнаго чертежа къ составленной по Трейтлейну таблицѣ.

Методологическимъ же пособіемъ могутъ служить всякаго рода схематическія таблицы для обзора положеній, заключающихся въ какомъ-либо изученномъ отдѣлѣ предмета, а также такія иллюстраціи пріемовъ мышленія, какъ таблицы, составленныя Д. Э. Теннеромъ.

Другимъ примѣромъ пользованія пособіемъ, какъ матеріаломъ для иллюстраціи основныхъ теоретиче-

[1]) Вопросы о желательности пользованія допустимости конкретными движеніями при преподаваніи геометріи, или, напротивъ, о послѣдовательномъ исключеніи движенія и замѣны его нѣкоторыми равносильными постулатами мы здѣсь не касаемся. См. докладъ А. Р. Кулишера: «О нѣкоторыхъ руководствахъ по геометріи». «Труды Перваго Съѣзда Препод. Математ.», т. II, стр. 37.

скихъ положеній, могущимъ служить также указаніемъ цѣлесообразнаго плана самостоятельныхъ ученическихъ работъ, будутъ пособія, примѣнимыя при изученіи равновеликости фигуръ и тѣлъ.

Равновеликость. Вопросъ о равновеликости заслуживаетъ въ курсѣ народной и средней школы по многимъ соображеніямъ большаго вниманія, чѣмъ ему обычно раньше удѣлялось. Разложимость равновеликихъ плоскихъ фигуръ на совмѣстимыя части, возможность дополнить равновеликія фигуры такъ, чтобы получить совмѣстныя, должны бы въ той или иной мѣрѣ найти освѣщеніе въ школьной работѣ. Съ этой точки зрѣнія найдется много интереснаго матеріала въ пособіяхъ Кэппа и Трейтлейна и кое-что въ пособіи Франка, въ нѣкоторыхъ моделяхъ, поясняющихъ теорему Пиѳагора, и т. п. Равновеликость геометрическихъ образовъ трехъ измѣреній можно иллюстрировать при помощи разнообразныхъ пособій въ указанныхъ выше коллекціяхъ, при помощи коллекцій, пособій допускающихъ въ пространствѣ по аналогіи многія изъ построеній, указанныхъ выше на плоскости, и интереснаго пособія Кюстера [1]).

Взаимное расположеніе частей фигуры. Вопросъ о разысканіи учащимися развертокъ тѣлъ вообще можетъ привести въ частности къ разысканію развертокъ поверхности куба, представляющей собой рядъ равновеликихъ фигуръ, состоящихъ изъ 6 квадратовъ. Однѣ изъ этихъ фигуръ могутъ непосредственно обрисовать кубъ, изъ другихъ получить кубъ прямо путемъ одного сгибанія нельзя. При помощи простого пособія (предложено А. Р. Кулишеромъ) возможно обратить вниманіе учащихся на важность взаимнаго расположенія частей геоме-

[1]) Въ свое время тотъ же ученикъ не безъ интереса хотя бы услышитъ отъ преподавателя, что два равновеликихъ тетраэдра, вообще говоря, не могутъ быть разложены на равное число равновеликихъ частей. См. докладъ В. Ф. Кагана, «Труды Съѣзда Препод. Математ.», стр. 579.

трическаго образа другъ относительно друга и тѣмъ у мѣста подчеркнуть одну изъ главныхъ цѣлей изученія геометріи. Аналогичныя соображенія могутъ возникнуть у обозрѣвателя при видѣ пособія Кюстера.

Наконецъ, должно бы найти мѣсто въ курсѣ внимательное разсмотрѣніе того своеобразнаго взаимнаго распредѣленія другъ относительно друга точекъ въ пространствѣ, которое носитъ названіе симметріи относительно точки (на плоскости и въ пространствѣ), относительно прямой (на плоскости и въ пространствѣ) и относительно плоскости. Къ этимъ случаямъ симметріи составители пособій (Д. Э. Теннеръ и А. Р. Кулишеръ) пробовали подойти съ болѣе общей точки зрѣнія, воспользовавшись нѣкоторыми образами, извѣстными въ проективной геометріи, а именно: связкой прямыхъ и пучкомъ прямыхъ и плоскостей, и приложить затѣмъ эти образы къ геометрическимъ фигурамъ и тѣламъ, извѣстнымъ уже раньше учащимся.

ГРАФИКИ (Т. V, VI и VII).

Графики, составленныя подъ руководствомъ Д. Э. Теннера и М. Л. Франка, должны служить нагляднымъ пособіемъ преподаванія математики, преимущественно для выясненія идеи функціональной зависимости на сравнительно простыхъ примѣрахъ. Вычерчиваніе такихъ графикъ во время классныхъ занятій на доскѣ является трудно осуществимымъ, потому что для ихъ нанесенія требуется опредѣленіе цѣлаго ряда точекъ, что отнимаетъ значительное количество времени. Кромѣ того, лишь исключительно хорошо рисующій преподаватель можетъ нанести мѣломъ на доскѣ кривую такъ плавно, чтобы ея образъ дѣйствительно соотвѣтствовалъ наглядному изображенію той или иной функціи. Наконецъ, во многихъ случаяхъ весьма полезнымъ является совмѣстное разсмотрѣніе цѣлой системы кривыхъ, представляющихъ собою одну и ту же функцію съ какимъ-нибудь перемѣннымъ параметромъ. Вычерчиваніе та-

кихъ системъ во время классныхъ занятій является совершенно невозможнымъ.

Графики, составленныя комиссіей, дѣлятся на слѣдующія группы:

Функціи алгебраическія:

а) линейная функція.

1) Уравненіе $y=ax+b$

2) Система уравненій $y=a_1x+b_1$

$y=a_2x+b_2$

служатъ какъ изображенія линейныхъ функцій, а также нагляднаго поясненія рѣшенія одного уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ и системы двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными.

3) Система прямыхъ $y=ax+b$ при различныхъ значеніяхъ b,

4) система прямыхъ $y=ax$ при различныхъ значеніяхъ коэффиціента a

служатъ для выясненія значенія коэффиціента при независимой перемѣнной (неизвѣстномъ) и извѣстнаго члена.

5) Графическая таблица перевода вѣса изъ килограммовъ въ фунты.

6) Графическая таблица перевода температуры по градусникамъ Цельсія, Реомюра и Фаренгейта

служатъ какъ примѣры линейныхъ функцій.

7) Система уравненій

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=o$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=o$$
$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3=o$$

служитъ: 1) для выясненія характера движенія точки пересѣченія двухъ прямыхъ при пропорціональномъ приращеніи свободныхъ членовъ и 2) для поясненія исключенія неизвѣстныхъ изъ системъ уравненій со многими неизвѣстными.

b) Функціи второй степени.

8) Уравненіе вида $y=x^2+px+q$

9) Кривая $y=x^2+px$ и прямая $y=-q$

Верхъ: графики окружности какъ эволюты окружностей (двѣ таблицы) Циклоида, окружн., какъ эволюта прямыхъ. Эвольвента окружности. Эпициклоида.

Модель часовъ съ подвижн. стрѣлками.

Циркуль классный.

Установка равновеликости: а) прямоугол. и параллелогр.; b) трапеціи и Δ-ка; e) двухъ кв-овъ съ третьимъ.

Абакъ.

Средина: абакъ Мрочека. Графики:

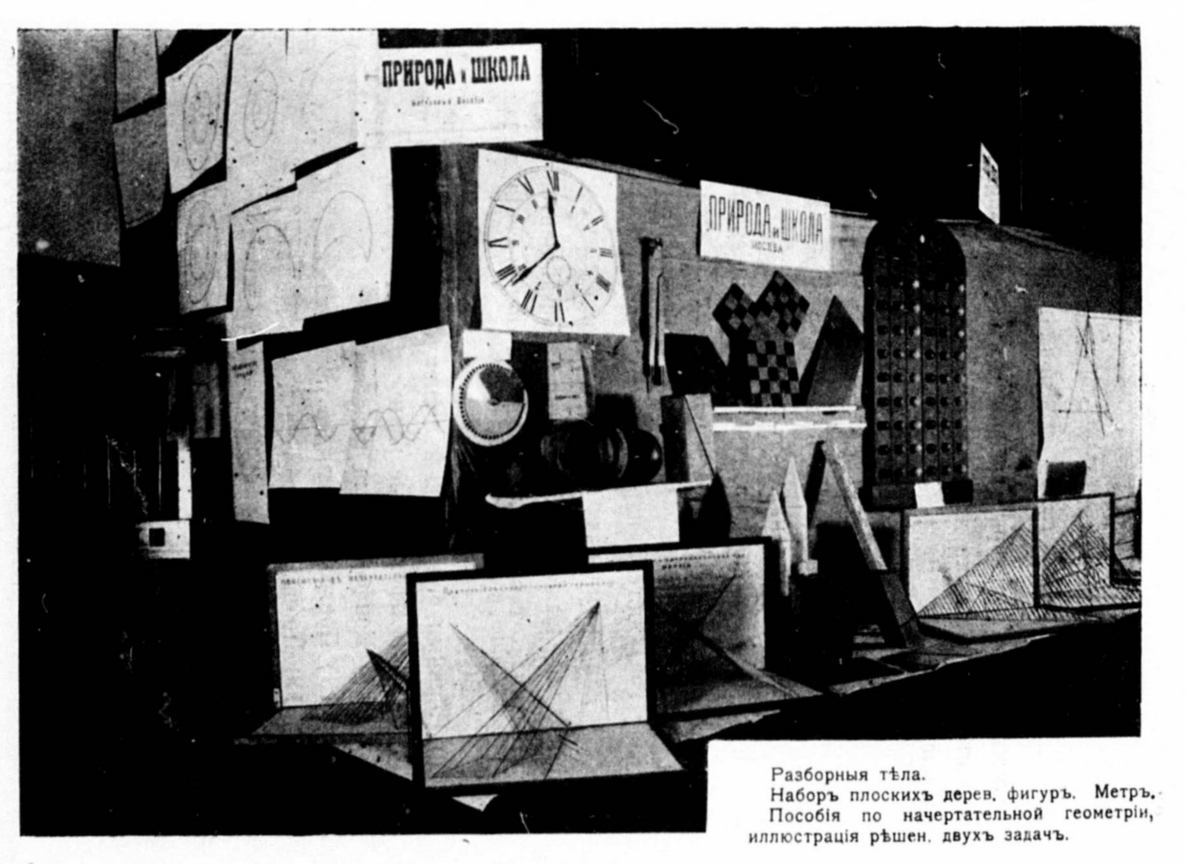
a) гипоциклоида;
b) кардіоида какъ эволюта системы прямыхъ;

c) $y = \sin x$
d $y = \arcsin x$.

e) Тригон. функціи.

Круговая діаграмма для прох. дробей и ∠. Теорема Архимеда. Разборная призма.

Низъ: пособія по начерт. геометріи: а) пересѣч. двухъ пирамидъ между собою;



Разборныя тѣла.
Наборъ плоскихъ дерев. фигуръ. Метръ.
Пособія по начертательной геометріи, иллюстрація рѣшен. двухъ задачъ.

b) пересѣч. пирамиды плоскостью; c) нахожденіе точки пересѣч. прямой съ плоскостью.

10) Кривая $y=x^2+q$ и прямая $y=-px$
11) Кривая $y=x^2$ и прямая $y=-px+-q$

служатъ какъ примѣры графическаго изображенія функціи 2-й степени, а также для графическаго рѣшенія квадратнаго уравненія.

12) Кривая $y=x^2$ и $x=y^2 (y=\pm\sqrt{x})$
13) Кривая $y=x^2+px+q$ и $x=y^2+py+q$,
как примѣръ прямыхъ и обратныхъ функцій.
14) Система параболъ $y=ax^2$
для различныхъ коэффиціентовъ a.
15) Система параболъ $y=x^2+bx$
для различныхъ коэффиціентовъ b.
15a) Система параболъ $y=x^2+c$
для различныхъ коэффиціентовъ c

служатъ для выясненія значенія коэффиціентовъ функціи 2-й степени, а также для поясненія перенесенія начала координатъ.

c) Неявныя функціи 2-й степени.
16) Конфокальные эллипсы и гиперболы.
17) Конфокальныя параболы.
18) Построеніе эллипса по точкамъ.
19) Построеніе параболы по точкамъ.
20) Построеніе гиперболъ по точкамъ.

d) Функція 3-ей степени.
21) Кривая $y=x^3\times px^2+px+r'$
какъ примѣръ функцій 3-й степени и примѣръ графическаго рѣшенія уравненія 3-й степени.
22) Система кривыхъ $y=x^3+ax$
для различныхъ значеній коэффиціента a, какъ изображеніе всѣхъ возможныхъ формъ кривыхъ, соотвѣтствующихъ явной функціи 3-й степени.

e) Функція гомографическая.
23) Кривая $y=\frac{a}{x}$

можетъ служить для изображенія закона Бойль-Маріотта.

24) Система кривыхъ $y = \frac{m}{x}$

для различныхъ значеній m

можетъ служить какъ изображеніе системы изотермъ для постоянныхъ газовъ.

f) Функція степенная.

25) Система кривыхъ $y = x^m$
для различныхъ значеній m и притомъ какъ цѣлыхъ, такъ и дробныхъ, но положительныхъ.

26) Система кривыхъ $y = x^{-m}$
для различныхъ значеній m какъ цѣлыхъ, такъ и дробныхъ.

Графики служатъ для поясненія быстроты возрастанія и убыванія функціи $y = x^m$, а также какъ наглядное изображеніе того, что $y = x^n$ и $y = x^{\frac{1}{n}}$ суть функціи, обратныя одна другой.

Трансцедентныя функціи.

27) Вспомогательная таблица для графическаго построенія величины m^x при x цѣломъ и дробномъ.

а) Функціи логариѳмическія и показательныя:

28) Кривыя $y = 2^x$ и $y = lg_2 x$, какъ примѣры логариѳмической и обратной ей показательной функціи.

29) Система кривыхъ $y = m^x$

30) Система кривыхъ $y = lg_m x$
для различныхъ значеній m какъ цѣлыхъ, такъ и дробныхъ

служитъ для общаго изученія логариѳмической и показательной функціи и поясненія смысла перехода отъ одной системы логариѳмовъ къ другой.

в) Тригонометрическія функціи.

31) Кривыя $y=sinx$; $y=cosx$; $y=tgx$ и $ctgx$;

32) Кривыя $y=sinx$; $y=arcsinx$

служатъ для изученія свойствъ тригонометрическихъ функцій и введенія понятія о функціи обратно-круговой.

Образованіе и построеніе циклическихъ кривыхъ.

33) Циклоида.

34) Эпициклоида.

35) Гипоциклоида.

36) Развертка круга.

Образованіе кривыхъ какъ эволютъ системы прямыхъ или кривыхъ.

37) Прямая, какъ эволюта системъ окружностей, проходящихъ черезъ одну точку, центры которыхъ расположены на параболѣ.

38) Окружность, какъ эволюта прямыхъ—равныхъ хордъ въ другой окружности.

39) Окружности, какъ эволюты равныхъ окружностей, центры которыхъ расположены на окружности.

40) Парабола, какъ эволюта системы прямыхъ.

41) Кардіоида, какъ эволюта системы прямыхъ.

42) Царабола, какъ эволюта перпендикуляровъ къ лучамъ, исходящимъ изъ фокуса, въ точкахъ ихъ пересѣченія съ касательной въ вершинѣ прямой.

43) Эллипсъ, какъ эволюта перпендикуляровъ къ лучамъ, исходящимъ изъ фокуса въ точкахъ ихъ пересѣченія съ окружностью касательной къ эллипсу въ его вершинахъ.

44) Гипербола, какъ эволюта перпендикуляровъ къ лучамъ, исходящимъ изъ фокуса, въ точкахъ ихъ пересѣченія съ окружностью, касательной къ гиперболѣ въ ея вершинахъ.

Пособія учрежденій, лицъ и фирмъ, приглашенныхъ комиссіей.

Кавказскій учебный округъ (Т. VIII и IX) представилъ слѣд. работы учениковъ реальнаго училища г. Баку:

1) графики, изобр., напр., измѣненія $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$;

2) развертки и модели геом. тѣлъ, склеенныхъ изъ развертокъ;

3) модели нѣкот. геом. тѣлъ; I) изъ картона; II) деревянныхъ палочекъ и пробокъ; III) стекла;

4) приборы по физикѣ, кот., какъ не относящіеся къ выставкѣ, не описываются.

Высшіе Женскіе Курсы и Женскій Педагогическій Институтъ (Т. IX) доставили на выставку слѣд. модели:

1) гипсовыя модели поверхностей 2-го порядка;

2) нитяныя подвижныя модели: однополаго гиперболоида, гиперболическаго параболоида;

3) модель конфокальныхъ поверхностей 2-го порядка;

4) модель поверхности съ постоянной отрицательной кривизной;

5) модели (гипсовая и картонная) развертывающейся винтовой поверхности;

6) модель косой винтовой поверхности;

7) модель кривыхъ двойной кривизны съ ихъ проекціями на три взаимно перпендик. плоскости (особенныя точки);

8) кинематическія модели изъ картона.

Технологическій институтъ доставилъ кинематическіе приборы для образованія циклическихъ кривыхъ и модели для полученія аффинныхъ преобразованій.

Императорское Училище Глухонѣмыхъ (Т. XV и XVI). 1) Нумераціонный ящикъ, состоящій изъ 3 вертикальныхъ ящичковъ. Въ первомъ ящичкѣ справа находится 9 пало-

Таблица VIII.



Верхъ: Графики.

Средина: коллекціи развертокъ и тѣлъ изъ нихъ (для учениковъ и для классовъ).

Таблицы: сравнит. табл. плотностей твердыхъ тѣлъ.

Чертежъ масленки.

Низъ: модели геом. тѣлъ изъ

1) дерев. палочекъ;
2) картона;
3) стекла.

Стереом. модели изъ деревянныхъ палочекъ.

Чертежи.

Приборы по физикѣ.

чекъ, въ среднемъ—9 связокъ по 10 палочекъ и въ III—сотня палочекъ. На этомъ пособіи проходится устная и письменная нумерація въ предѣлѣ 199 и два дѣйствія (сложеніе и вычитаніе) въ томъ же предѣлѣ. 2) Самодѣльные вѣсы и кружки для взвѣшиванія при примѣненіи лабораторнаго метода обученія счету, который былъ подробно описанъ въ доставленной на выставку рукописи «Лабораторный методъ обученія счету». 3) Вырѣзанныя фигурки для обученія счету. 4) Мѣры длины и вѣса.

Работы ученицъ Козловской Женской Гимназіи Сатиной (Т. X), исполненныя подъ руководствомъ З. В. Масленко. Приготовленныя учащимися модели состояли изъ:

1) бумажныхъ плоскихъ фигуръ къ первоначальнымъ теоремамъ планиметріи;

2) картонажей къ нѣкоторымъ теоремамъ стереометріи;

3) діаграммъ;

4) моделей изъ нитокъ по стереометріи;

5) куба изъ глины для нагляднаго поясненія формулы: $(a+b)^3$.

Работы учениковъ Костромской Общественной Гимназіи (Т. XI) подъ руководствомъ Г. В. Лехницкаго состояли изъ:

1) моделей изъ картона тѣлъ, изучаемыхъ въ стереометріи, напр., модель пирамиды, икосаэдра;

2) моделей стереометрическихъ и планиметрическихъ фигуръ изъ картона, оклееннаго цвѣтной бумагой;

3) моделей планиметріи и стереометріи изъ цвѣтныхъ палочекъ, соединяемыхъ метал. уголками, напр., модели угловъ;

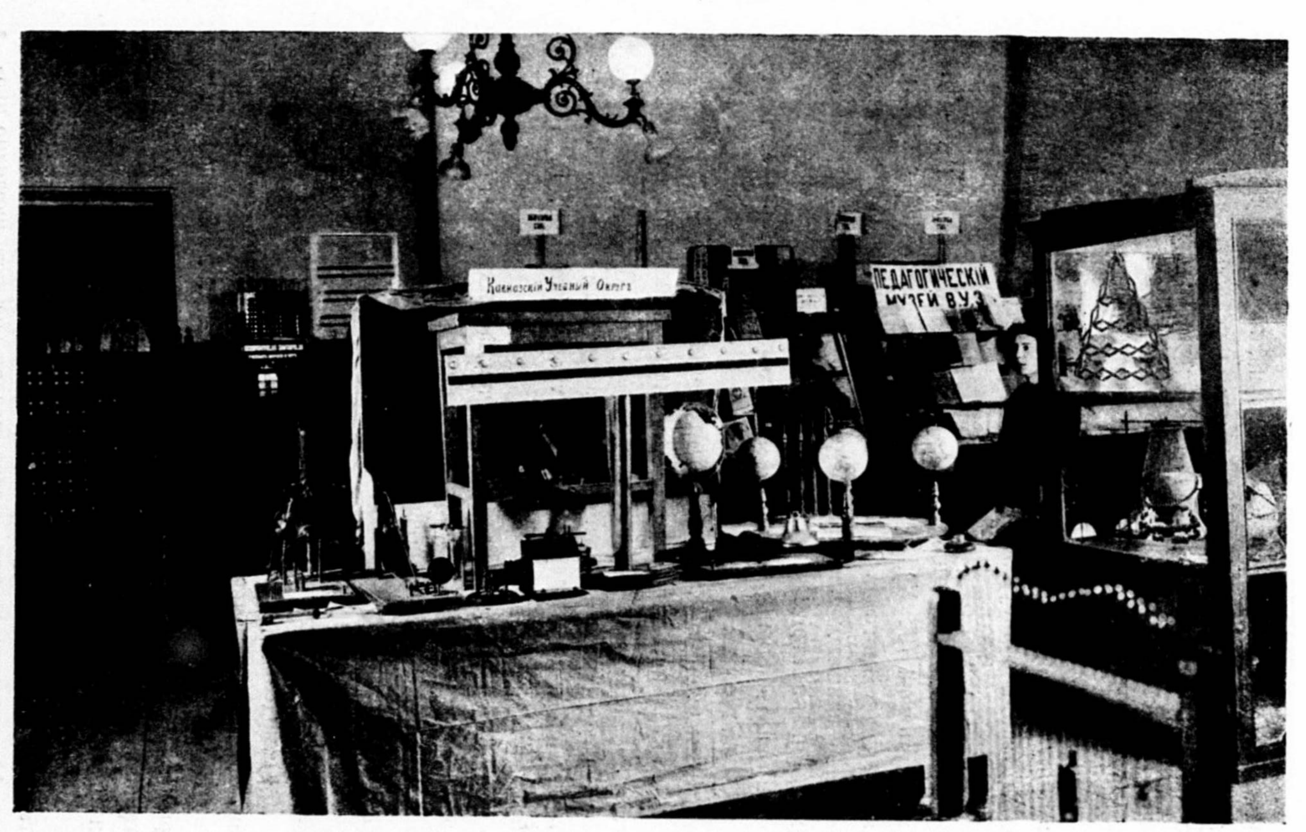
4) моделей изъ комбинаціи цвѣтныхъ палочекъ и нитей, поясняющихъ начальныя теоремы стереометріи.

На выставку былъ доставленъ также тригонометрическій приборъ (сдѣл. по иниціативѣ и самостоятельно 2-мя учениками старшаго класса) для показанія измѣненій тригонометрическихъ линій угловъ $< 180°$.

Криворожское Коммерч. Училище (Т. XII) доставило работы учениковъ:

1) выпиленныя изъ дерева модели, на кот. наглядно про-

Таблица IX.



Сзади: Счеты Лая.
Счеты Канаева.
Таблица для изученія дробей.

Впереди: Пособія по физикѣ и географіи Кавк. Учебн. Округа.
Модели В. Ж. Курсовъ, Ж. П. Инст. и

вѣряются нѣк. теоремы и опредѣленія планиметріи, какъ, напр., — вписанный уголъ = ½ центр. угла, опирающагося на ту же дугу (см. снимокъ);

2) простѣйшія геометр. тѣла, сдѣланныя изъ картона;

3) рисунки.

Пособіе, изготовленное ученицами Св. Владимірской Церковно-учительской школы (Т. XIII) подъ руководствомъ Д. Э. Теннера, состоитъ изъ пробковой плоскости, обтянутой матеріей, палочекъ съ иголками на концахъ и штатива подобно тому, какъ это имѣется въ пособіи Блюммеля. Кромѣ того, въ составъ пособія введены пробковые шарики и полушарія, служащіе для соединенія палочекъ; для изображенія плоскостей изготовлены изъ тѣхъ же палочекъ рамки, обтянутыя матеріей, напоминающей собою рѣдкую канву. Благодаря чему плоскости являются и прозрачными, и проницаемыми. Ко всему этому присоединяются картоны, круги, параболы и гиперболы.

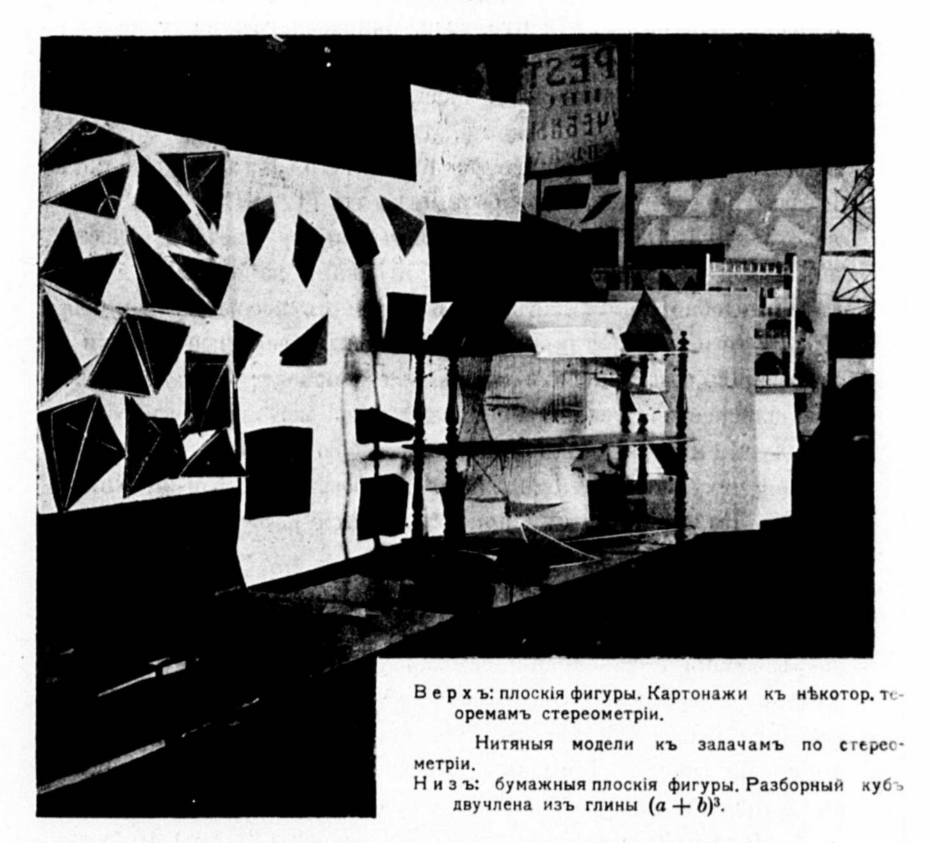
«Наглядная стереометрія» Ефремовича (Т. XVI). Пособіе состоитъ изъ тетради съ чертежами, изъ которыхъ путемъ вырѣзыванія и склеиванія самими учащимися приготовляются модели, выясняющія содержаніе теоремъ. У каждаго чертежа указаны параграфъ и соотвѣтствующій общепринятый учебникъ геометріи (напр., Давыдовъ, Киселевъ). На выставку были представлены также, кромѣ чертежей, и нѣкоторыя модели.

«Черченіе и счетъ» И. Износкова (Т. XV). Подъ такимъ заглавіемъ на выставку были доставлены магическіе квадраты или «волшебныя фигуры», которыя могутъ служить пособіемъ для изученія разложенія чиселъ на слагаемыя.

«Абакъ» Мрочека (Т. VII) служитъ для двухъ цѣлей. Нижняя часть прибора представляетъ собой счеты Лая въ предѣлахъ 100, а верхняя даетъ возможность показать нумерацію цѣлыхъ и десятичныхъ чиселъ (см. вращающіеся цилиндры подъ каждымъ стержнемъ). Кромѣ того, верхняя часть прибора служитъ для суммированія различныхъ рядовъ и для построенія графикъ столбиками или шариками (точками) двухъ цвѣтовъ.

«Школьный счетный приборъ» (модель) М. Н. Песоцкаго (Т. XIV). Съ помощью этого пособія проходится уст-

Таблица X.



Верхъ: плоскія фигуры. Картонажи къ нѣкотор. теоремамъ стереометріи.

Нитяныя модели къ задачамъ по стереометріи.

Низъ: бумажныя плоскія фигуры. Разборный кубъ двучлена изъ глины $(a + b)^3$.

ная и письменная нумерація надъ числами любой величины, начиная съ 1.

Модель представляетъ собой черную доску (на подставкѣ), раздѣленную на четыреугольники. Въ каждую клѣтку въ извѣстномъ порядкѣ (см. снимокъ) вставлено по 9 крючковъ, на которые вѣшаются цвѣтные диски.

При изученіи нумераціи въ предѣлѣ 10 изъ одноцвѣтныхъ дисковъ образуютъ числовыя фигуры. Нуль изображается большимъ кольцомъ. Число взятыхъ дисковъ для образованія числовыхъ фигуръ изображается большой арабской цифрой на карточкѣ, которая вѣшается въ ту же клѣтку, гдѣ находится числовая фигура. При дальнѣйшемъ прохожденіи нумераціи

каждые 10 дисковъ складываются въ открывающ. коробочку-цилиндръ другого цвѣта, которая представляетъ собой новую счетную единицу, а 10 дисковъ такого же цвѣта складываются въ другую коробочку новаго цвѣта, которая опять даетъ представленіе о новой счетной единицѣ, и т. д.

Универсальный геометрическій приборъ Е. Н. Полушкина (Т. XV и XVI). (СПБ. Вас. Остр., Средній просп., д. 48, кв. 41).

Универс. приборъ приспособленъ для прохожденія курса геометріи, тригонометріи, начал. аналитич. геометріи и начерт. геометріи.

Онъ основанъ на примѣненіи кинематическаго метода преподаванія геометріи и служитъ для демонстрированія процесса измѣненія формы въ связи съ измѣненіемъ геом. величинъ. Напр., показанный на снимкѣ параллелограммъ можетъ быть преобразованъ во всѣ виды четыреугольниковъ, а 6-тиуг. пирамида (см. др. снимокъ) преобразовывается передвиженіемъ уравновѣшеннаго стержня, къ кот. прикрѣплена ея вершина, въ правильныя, наклонныя, равновеликія формы.

Фигуры плоскія и пространственныя изображаются гибкими натянутыми нитями или жесткими стерженьками.

«Пособіе по стереометріи» Розенбергера (г. Карачевъ). Пособіе служитъ для построенія фигуръ самими учащимися въ классѣ при прохожденіи и рѣшеніи задачъ по стереометріи. Оно представляетъ собой цинковую кюветку (пособіе можетъ быть сдѣлано самими учащимися) съ застывшей массой изъ вазелина и желтаго воска и стержней съ вилообразными концами. Чтобы построить, напр., 3-угольную призму, помѣщаютъ на восковую поверхность 1 желѣзный треугольникъ изъ проволоки и втыкаютъ около каждой вершины, параллельно другъ другу по стержню, на вилообразные концы кот. надѣваютъ другой треугольникъ.

При изученіи взаимнаго положенія плоскостей пользуются, какъ 2-ой плоскостью (I плоск.—поверхность массы), стеклянной пластинкой.

Таблица XI.



Верхъ: Примѣры геометрическихъ плоскихъ фигуръ изъ палочекъ, скрѣпленныхъ металлич. уголками.

Средина. Стереом. тѣла изъ бѣлаго картона.
Стереом. модели изъ дерева и разноцвѣтныхъ нитокъ
Тригоном. приборъ.

Низъ. Стереом. тѣла изъ бѣлаго картона съ цвѣтными сѣченіями.
Планим. модели для доказат. теоремы Пиѳагора.

Пособія Франка (Т. XII): а) для иллюстраціи жесткихъ и измѣняющихся геометрическихъ тѣлъ, сдѣланныхъ изъ дерев. палочекъ и скрѣпленныхъ каучуковыми трубочками; б) для иллюстраціи неизмѣняемости сѣченій пирамидъ при пропорціональномъ измѣненіи реберъ и ихъ отрѣзковъ. Сѣченія и основныя пирамиды сдѣланы изъ палочекъ, а боковыя ребра изъ резиновыхъ полосъ.

«Культура».

1) Наборы плоскихъ фигуръ изъ цинка и изъ дерева для нагляднаго ознакомленія съ теоремами планиметріи.

2) Коллекціи по стереометріи Дюпьи (проволочныя), Кэппа, (изъ жести и проволоки 25 моделей), Гензинга (вычисленіе объема шара по Архимеду).

3) Модели пересѣченія тѣлъ плоскостями и между собою.

4) Стеклянныя модели по сферической тригонометріи и транспортиры Крешмера для опредѣленія тригонометрическихъ величинъ.

5) Модели кристалловъ изъ груш. дерева.

6) Мангъ. Квадратъ для измѣренія угловъ возвышенія.

Редакція «Художественно-педагогическаго журнала» выставила наборы для игръ и занятій Меккано и Мотадоръ, пластицынъ, пригодный для лѣпки геометрическихъ тѣлъ и цвѣтные мѣлки для класснаго черченія.

«Песталоцци». СПБ. Казанская, 14.

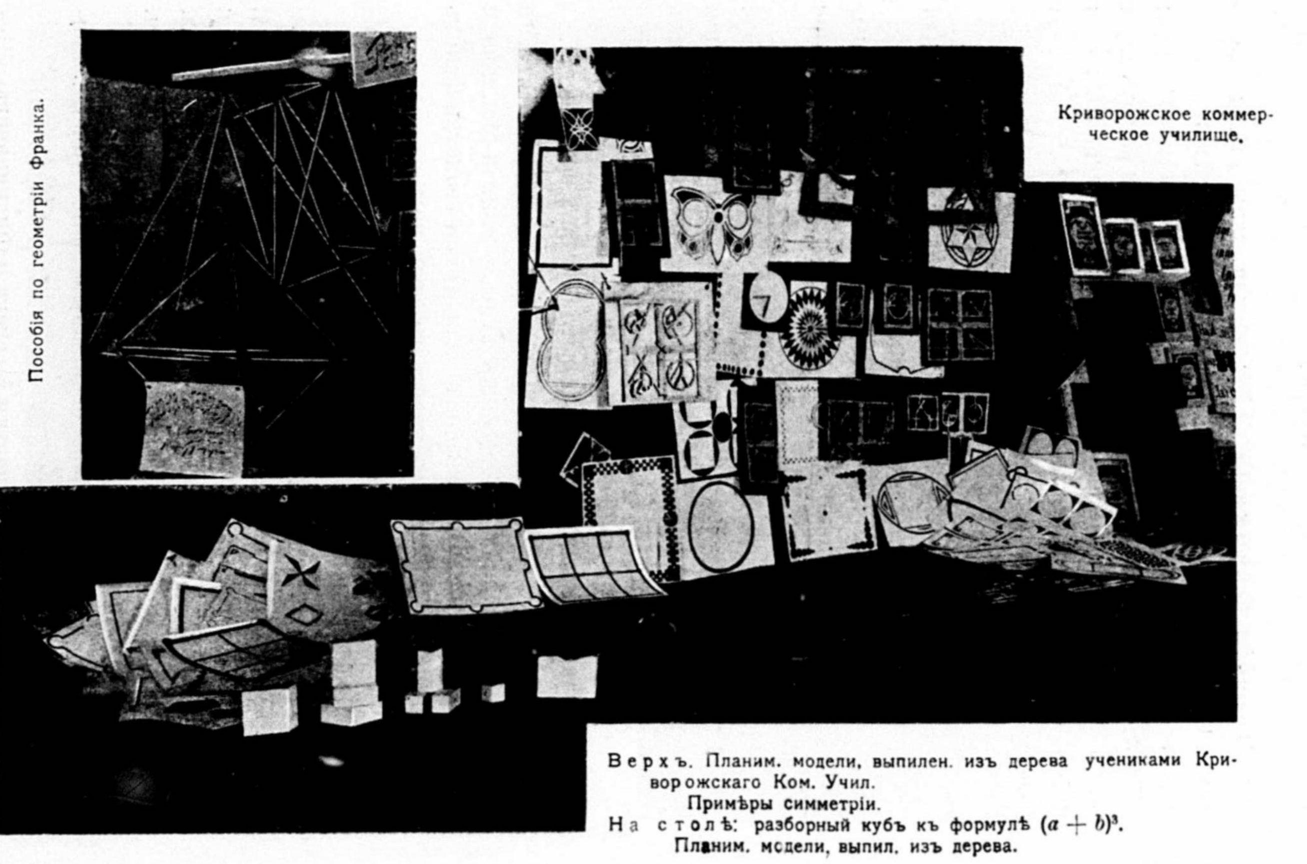
1) Пособія по ариѳметикѣ:

Ариѳм. ящикъ «Arithmos» съ кубиками для построекъ; Мюллеръ—таблицы первон. счета; Песталоцци—4 табл. дробей; счеты — Бромбергера, Фритче съ двуцвѣтн. призмами, Лая; принадлежности для(лабораторнаго метода въ математикѣ спицы, вѣсы и т. д.); коллекція метрич. мѣръ и таблицы мѣръ метрич. системы Боппа и Дингеса.

2) Пособія по геометріи: подвижныя фиг. Винеке, Гюнцеля.

Разборныя тѣла и развертки Мрочека и Филипповича, «Песталоцци», Кольштока; разборный шаръ Шварца; модели изъ грушеваго дерева, коллекція геом. тѣлъ изъ мѣди.

Таблица XII.



Пособія по геометріи Франка.

Криворожское коммерческое училище.

Верхъ. Планим. модели, выпилен. изъ дерева учениками Криворожскаго Ком. Учил.
Примѣры симметріи.

На столѣ: разборный кубъ къ формулѣ $(a + b)^3$.
Планим. модели, выпил. изъ дерева.

3) Аппаратъ съ подвижными синусомъ и секансомъ.

4) Универсальный циркуль для классной доски.

Природа и Школа (Т. VII). Адр.: Москва, Б. Прѣсня, Волковъ пер., д. № 17.

1) 5 моделей по начертательной геометріи инж. Калліониди. Каждая модель представляетъ собой 2 вз. ⊥ доски съ наклеенными на нихъ чертежами и натянутыми разноцвѣтными нитями, показывающими линіи, плоскости, точки ихъ пересѣченія въ пространствѣ и ихъ проекціи на 2 плоскости;

2) наборъ плоскихъ деревянныхъ фигуръ для нагляднаго: a) опредѣленія величины площадей прямоугольника, параллелограмма, треугольникъ и трапеціи; b) доказательствъ теоремы Пиѳагора;

3) наборъ изъ 3 круглыхъ тѣлъ, одинаковаго діаметра и высоты;

4) наборъ разборныхъ тѣлъ для опредѣленія объемовъ призмы, пирамиды и параллелопипеда;

5) круговая діаграмма съ нѣсколькими подвижными разноцвѣтными кругами, служащая пособіемъ при первонач. знакомствѣ съ дробями и углами;

6) циферблатъ съ подвижными метал. стрѣлками;

7) образцы мѣръ линейныхъ, квадр. и куб.;

8) абакъ въ видѣ доски съ вынимающимися разноцвѣтными шариками.

Мастерская Шварца. СПБ. Серпуховская ул., 6.

1) разборный шаръ Шварца;

2) разборныя деревянныя геом. тѣла;

3) проволочныя никкелированныя стереометр. модели съ приставными обозначеніями;

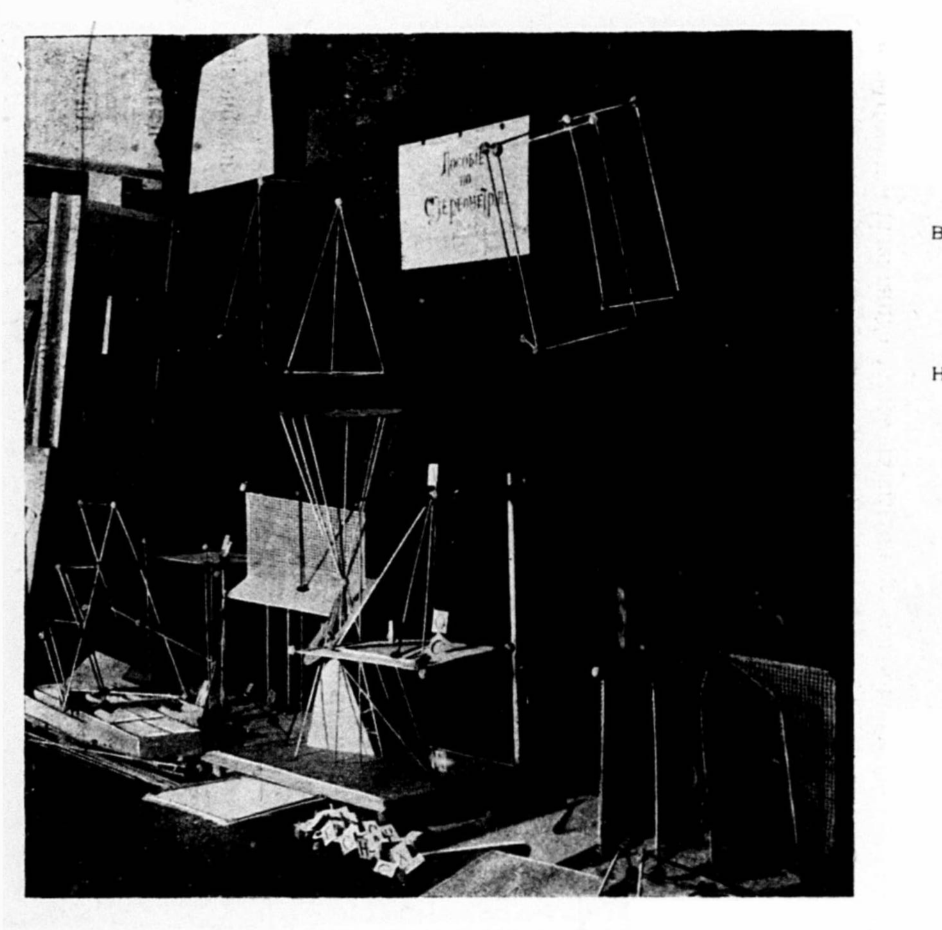
4) различныя модели для нагляднаго доказательства теоремы Пиѳагора;

5) приборъ для демонстрированія построенія и измѣненія величинъ и знаковъ тригонометрическихъ функцій;

6) приборъ для нагляднаго изученія нумераціи цѣлыхъ чиселъ и десят. дробей.

«Стереометрія въ стереоскопѣ» Юсевича. На выставку были представлены слѣд. экспонаты:

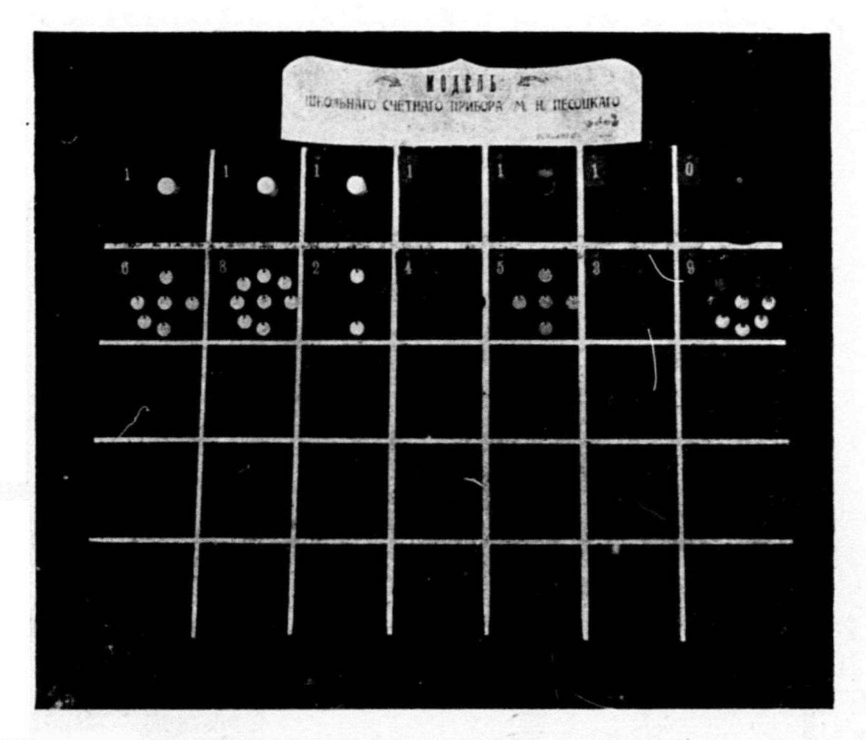
Таблица XIII.



Верхъ: двѣ симметричныхъ трехгранныхъ пирамиды, 5-угольная призма.

Низъ: Пирамида съ исходящими и входящими призмами. Построенія для теоремъ о параллельныхъ плоскостяхъ, перпендикулярныхъ плоскостяхъ, о перпендикулярѣ къ плоскости, о пропорціональныхъ двугранныхъ и ихъ линейныхъ угловъ. Коническая поверхность съ сѣченіями. Принадлежность.

Таблица XIV.



Модель Школьнаго счетнаго прибора М. Н. Песоцкаго.

1) «Стереометрія въ стереоскопѣ», сост., Менковичемъ;

2) дополненія къ «Стереометріи въ стереоскопѣ», сост. Юсевичъ, заключающія: 1) стереом. задачи; 2) аналит. геометріи; 3) космографіи; 4) начерт. геометріи и пр.;

3) «Кристаллографія въ стереоскопѣ», сост. Юсевичъ.

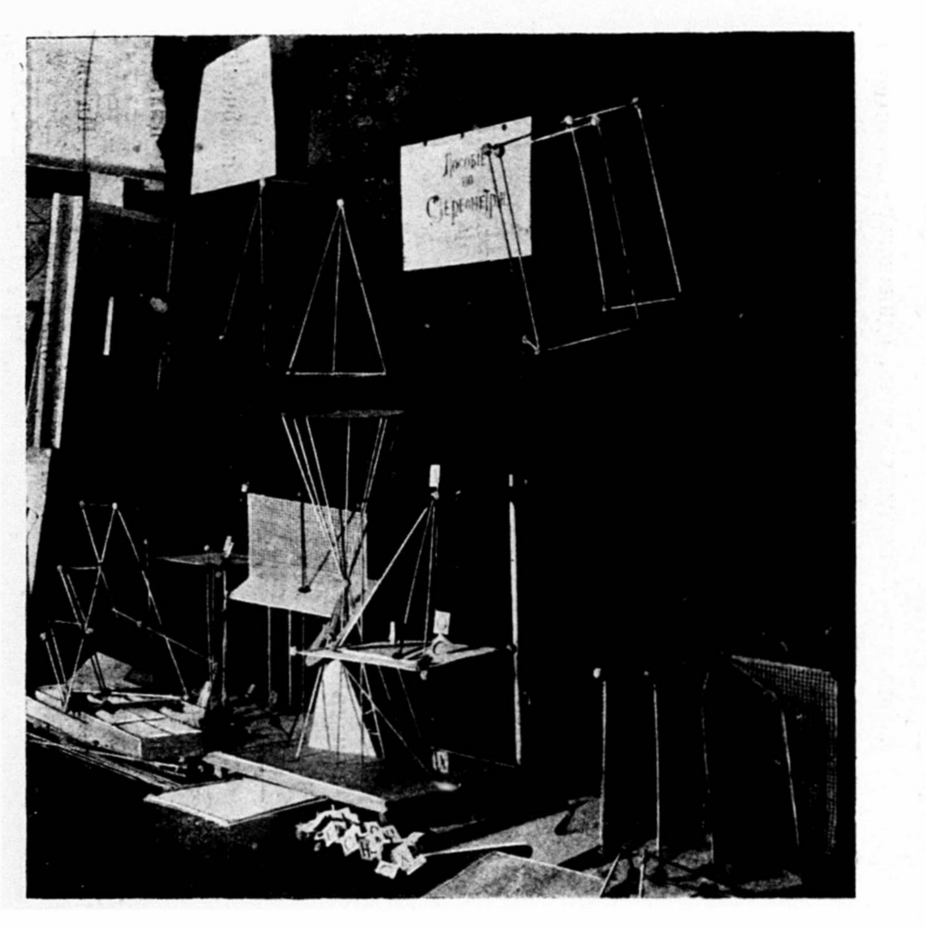
Подборъ стереограммъ отвѣчаетъ теоремамъ общепринятыхъ курсовъ геометріи.

Математическая и методическая литература.

Математическую и учебную литературу представили на выставку слѣдующія учрежденія и лица:

Педагогическій музей в.-уч. зав. Спб., Vuibert—Paris, Березовскій—Спб., Mathesis—Одесса, «Новое Время»—Спб., «Обще-

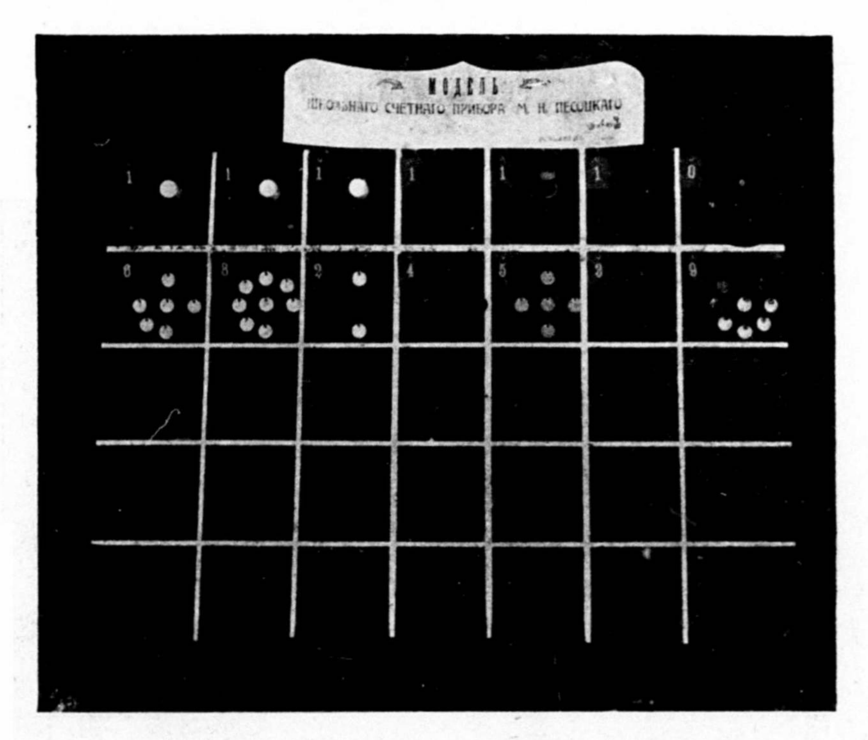
Таблица XIII.



Верхъ: двѣ симметричныхъ трехгранныхъ пирамиды, 5-угольная призма.

Низъ: Пирамида съ исходящими и входящими призмами. Построенія для теоремъ о параллельныхъ плоскостяхъ, перпендикулярныхъ плоскостяхъ, о перпендикулярѣ къ плоскости, о пропорціональныхъ двугранныхъ и ихъ линейныхъ угловъ. Коническая поверхность съ сѣченіями. Принадлежность.

Таблица XIV.



Модель Школьнаго счетнаго прибора М. Н. Песоцкаго.

1) «Стереометрія въ стереоскопѣ», сост., Менковичемъ;

2) дополненія къ «Стереометріи въ стереоскопѣ», сост. Юсевичъ, заключающія: 1) стереом. задачи; 2) аналит. геометріи; 3) космографіи; 4) начерт. геометріи и пр.;

3) «Кристаллографія въ стереоскопѣ», сост. Юсевичъ.

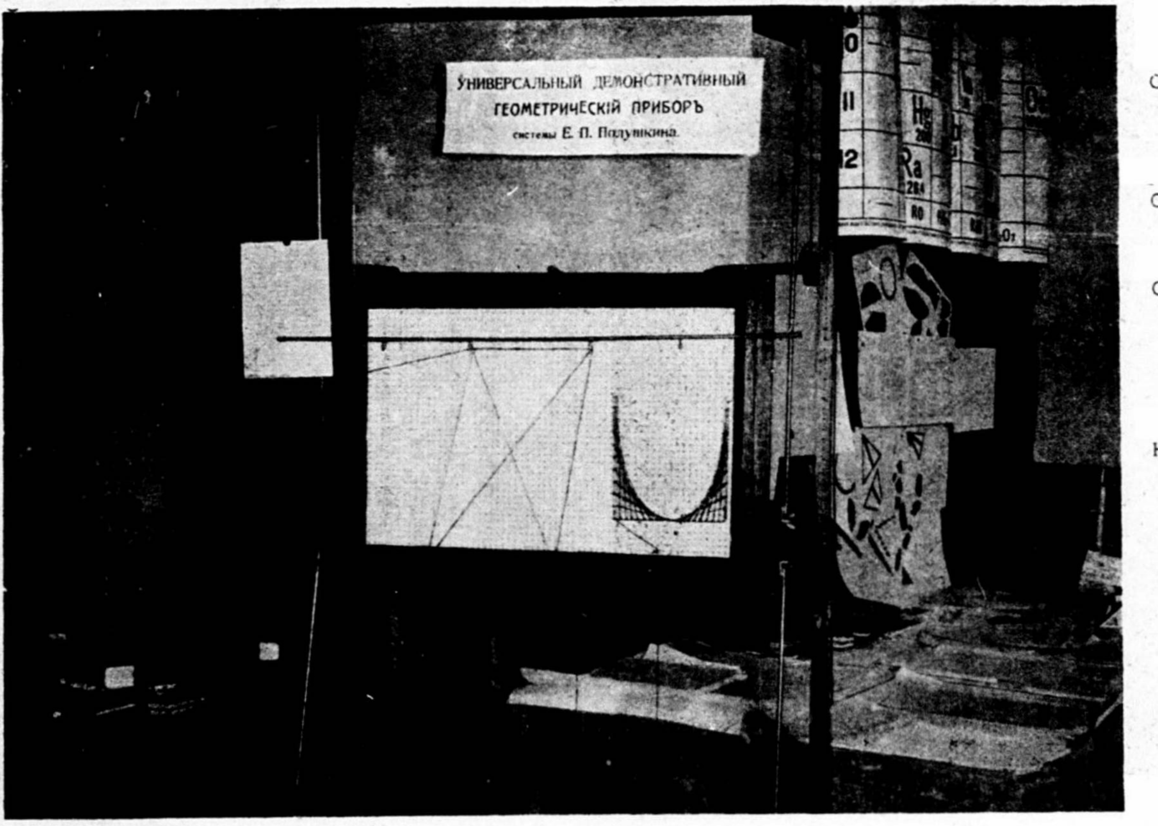
Подборъ стереограммъ отвѣчаетъ теоремамъ общепринятыхъ курсовъ геометріи.

Математическая и методическая литература.

Математическую и учебную литературу представили на выставку слѣдующія учрежденія и лица:

Педагогическій музей в.-уч. зав. Спб., Vuibert—Paris, Березовскій—Спб., Mathesis—Одесса, «Новое Время»—Спб., «Обще-

Таблица XV.



Слѣва: Принадлежности къ геометрич. прибору Полушкина.

Середина: геом. приборъ его же.

Справа: Таблица Менделѣева.

Чертежи фигуръ Ефремовича.

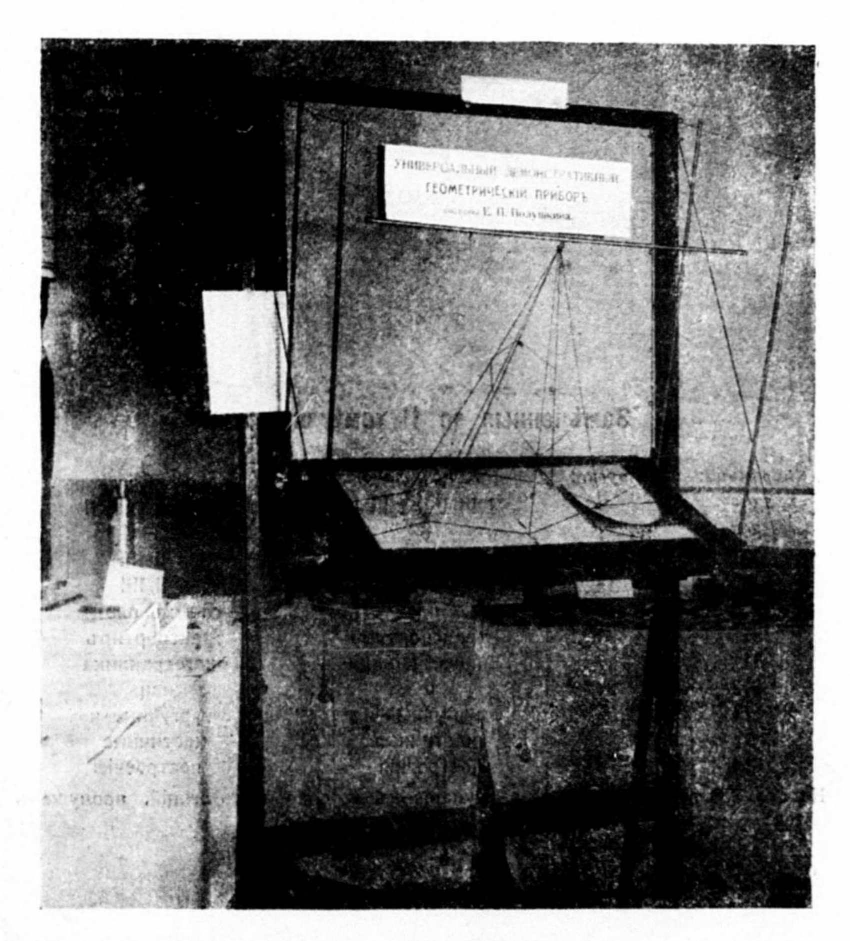
На столѣ: Образцы чертежной бумаги Неслуховскаго.

Модели тѣлъ изъ развертокъ Ефремовича.

Вѣсы Имп. Училиша Глухонѣмыхъ.

Кружки для обученія счету Импер. Училища Глухонѣмыхъ.

Таблица XVI.



На столѣ: Кружки Имп. Училища Глухонѣмыхъ.
Тѣла изъ развертокъ Ефремовича.
Нумераціон. ящикъ Имп Училища Гухонѣмыхъ.
„Магическіе квадраты“ Износкова.

Предъ столомъ: Геом. приборъ Е. П. Попушкина.

ственная Польза», «Посредникъ»—Москва, Ф. И. Трескина—Рига, «Художественно-педагогическій журналъ»—Спб., Волковскій, Н. А. Извольскій, А. П. Киселевъ, В. В. Лермантовъ, П. П. Мироносицкій, П. Никульцевъ.

Замѣченныя во II томѣ опечатки.

Страница:	*Строка*:	*Напечатано*:	*Надо*:
306	8	I III II и I III II	I III II и I IIII II
307	1	d	G
307	9	и II III	и II IIII
307	14	и II III	и II IIII
310	10	пло-	самихъ пло-
311	20	транспортиры	транспортиръ
312	2	многогранники	многогранника
312	21	и	или
314	5	сургучныя и мастичныя	сургучные и мастичные
314	8	построенія	построеніе:

На стр. 339 въ спискѣ лицъ, выступавшихъ въ собраніяхъ секцій, пропущенъ Д. Э. Теннеръ (т. II, стр. 286).

ТРУДЫ

I-го ВСЕРОССІЙСКАГО СЪѢЗДА ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ.

Томъ I-й. Общія собранія. Стр. XVI+609. СПБ. 1913 г. Цѣна 3 рубля.

Томъ II-й. Секціи. Стр. VII+364. С.-Петерб. 1913 г. Цѣна 2 р. 50 коп.

Томъ III-й. Доклады, оставшіеся не прочитанными на Съѣздѣ, и обозрѣніе выставки. Стр. VIII + 114 СПБ. 1913 г. Цѣна 75 коп.

Выписывающіе „ТРУДЫ" черезъ Канцелярію Педагогическаго Музея **(С.-Петербургъ, Фонтанка, № 10)** за пересылку не платятъ.